



MEMAHAMI KALKULUS DASAR MENGGUNAKAN WOLFRAM MATHEMATICA 9

Dr. Suhartono. S.Si M.Kom

**JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA
UIN MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**



REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN CIPTAAN

Menteri Hukum dan Hak Asasi Manusia Republik Indonesia, berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta yaitu Undang-Undang tentang perlindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra (tidak melindungi hak kekayaan intelektual lainnya), dengan ini menerangkan bahwa hal-hal tersebut di bawah ini telah tercatat dalam Daftar Umum Ciptaan:

- I. Nomor dan tanggal permohonan : C10201500011, 11 Februari 2015
- II. Pencipta
Nama : **Dr. SUHARTONO, S.Si., M.Kom.**
Alamat : Perum. BPTP Blok B No.7, Kel. Kepuharjo
Kec. Karangploso, Malang, Jawa Timur.
Kewarganegaraan : Indonesia
- III. Pemegang Hak Cipta
Nama : **Dr. SUHARTONO, S.Si., M.Kom.**
Alamat : Perum. BPTP Blok B No.7, Kel. Kepuharjo
Kec. Karangploso, Malang, Jawa Timur.
Kewarganegaraan : Indonesia
- IV. Jenis Ciptaan : Karya Tulis
- V. Judul Ciptaan : **MEMAHAMI KALKULUS DASAR MENGGUNAKAN WOLFRAM MATHEMATICA 9**
- VI. Tanggal dan tempat diumumkan : 01 Januari 2015, di Malang
untuk pertama kali di wilayah
Indonesia atau di luar wilayah
Indonesia
- VII. Jangka waktu perlindungan : Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung
hingga 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta
meninggal dunia.
- VIII. Nomor pencatatan : 073408

Pencatatan Ciptaan atau produk Hak Terkait dalam Daftar Umum Ciptaan bukan merupakan pengesahan atas isi, arti, maksud, atau bentuk dari Ciptaan atau produk Hak Terkait yang dicatat. Menteri tidak bertanggung jawab atas isi, arti, maksud, atau bentuk dari Ciptaan atau produk Hak Terkait yang terdaftar. (Pasal 72 dan Penjelasan Pasal 72 Undang-undang Nomor 28 Tahun 2014 Tentang Hak Cipta)

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
REPUBLIK INDONESIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL
u.b.

DIREKTUR HAK CIPTA, DESAIN INDUSTRI,
DESAIN TATA LETAK SIRKUIT TERPADU, DAN RAHASIA DAGANG



Yuslisar Ningsih, S.H., M.H.
NIP. 195511291982032001

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirabbil'Alamin penulis haturkan kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat, hidayah, dan ridha-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku “ Memahami Kalkulus Dasar Menggunakan Wolfram Mathematica 9” sebagai pendamping mata kuliah matematika dasar di jurusan Teknik Informatika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selanjutnya penulis menghaturkan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan doa, harapan, dan semangat untuk terselesaikannya buku ini. Ucapan terima kasih, penulis sampaikan kepada :

1. Segenap civitas akademika jurusan Teknik Informatika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas masukannya.
2. Istri Ari Asri Vita S.P dan anak Athaula Dawam Wisesa yang senantiasa memberikan spirit.
3. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan buku ini baik berupa moril maupun materiil.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan buku pendamping mata kuliah matematika dasar ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga buku ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi mahasiswa semester 1 untuk menyelesaikan permasalahan matematika dasar dengan menggunakan software Wolfram Mathematica 9. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 20 Januari 2015

Penulis

DR Suhartono M.Kom

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
KATA PENGANTAR.....	ii
DAFTAR ISI	iii
BAB I PERTIDAKSAMAAN DAN NILAI MUTLAK	
1.1 Pertidaksamaan Satu Variabel	1
1.1.1 Pembahasan Soal	2
1.1.2 Cara Matematika Wolfram	5
1.2 Nilai Mutlak	9
1.2.1 Sifat – Sifat Nilai Mutlak	9
1.2.2 Soal Nilai Mutlak	11
1.2.3 Pembahasan Menggunakan Wolfram	14
BAB II FUNGSI DAN LIMIT FUNGSI	
2.1 Fungsi	15
2.1.1 Pembahasan Soal Fungsi	17
2.1.2 Cara Wolfram	19
2.2 Limit Fungsi	20
2.2.1 Teorema Limit	20
2.2.2 Operasi Pada Limit Fungsi	21
2.2.3 Teorema 4 Fungsi Polinom	22
2.3 Pembahasan Soal	23
2.4 Cara wolfram	25
BAB III TURUNAN FUNGSI	
3.1 Pengertian Turunan Fungsi.....	26
3.2 Turunan Fungsi Konstanta Dan Pangkat.....	27
3.3 Sifat – Sifat Turunan	28
3.4 Aturan Rantai	28
3.5 Turunan Fungsi Invers	29

3.6 Turunan Fungsi Implisit	29
3.7 Turunan Tingkat Tinggi	30
3.8 Turunan Fungsi Aljabar dan Transendren	31
3.8.1 Turunan Fungsi Rasional	31
3.8.2 Turunan Fungsi Irasional	31
3.8.3 Turunan Fungsi Trigonometri	32
3.8.4 Turunan Fungsi Siklometri	33
3.8.5 Turunan Fungsi Logaritma	34
3.8.6 Turunan Fungsi Eksponensial	36
3.8.7 Turunan Fungsi Hiperbolik	36
3.9 Turunan Fungsi Parameter	37
3.10 Pembahasan Soal Manual	38
3.11 Pembahasan Soal Wolfram	44

BAB IV INTEGRAL

4.1 Pengertian	45
4.1.1 Teorema	45
4.1.2 Akibat	45
4.2 Integral dengan Substitusi	47
4.2.1 Teorema	47
4.3 Integral Parsial	48
4.4 Integral yang Menghasilkan Arcus Tangen dan Logaritma ..	49
4.5 Integral Fungsi Pecah Rasional	51
4.5.1 Keadaan $N(x) = D'(x)$	51
4.5.2 Keadaan Derajat $N(x) \geq D(x)$	51
4.5.3 Keadaan Derajat $N(x) < D(x)$	51
4.6 Integral Fungsi Trigonometri	59
4.6.1 Rumus – Rumus Sederhana	59
4.6.2 Bentuk $\int R(\sin x) \cos x \, dx$ dan $\int R(\cos x) \sin x \, dx$	59
4.6.3 Integral Dengan Memperhatikan Rumus –Rumus ...	59
4.6.4 Substitusi	60

4.6.5	Integral	60
4.6.6	Rumus Reduksi Untuk Integral Fungsi Trigonometri	61
4.7	Integral Fungsi Irrasional	62
4.7.1	Rumus Yang Perlu Dihafal	62
4.7.2	Bentuk Irrasional Satu Suku	62
4.7.3	Satu – Satunya Bentuk Irrasional	63
4.7.4	Substitusi Trigonometri	63
4.8	Pembahasan Soal Manual	64
4.9	Cara Wolfram	74

BAB V INTEGRAL TERTENTU

5.1	Pengertian Integral Tertentu	77
5.1.1	Definisi 1	77
5.1.2	Definisi 2	78
5.1.3	Teorema Fundamental Kalkulus	80
5.1.4	Teorema	81
5.2	Aplikasi Integral	81
5.2.1	Luas Daerah	81
5.2.2	Volume Benda Putar	82
5.2.3	Panjang Kurva	89
5.2.4	Luas Permukaan Benda Putar	93
5.2.5	Usaha atau Kerja	97
5.2.6	Momen dan Pusat Massa (Titik Berat)	100

BAB 1

PENGANTAR WOLFRAM MATHEMATICA

Mathematica adalah Computer Algebra Systems yang dibuat oleh Steven Wolfram. Terdapat banyak fungsi dalam toolbar Mathematica, tapi yang akan diterangkan dibawah ini adalah dianggap penting dalam menulis atau yang kelihatannya berbeda dengan software matematika yang lain.

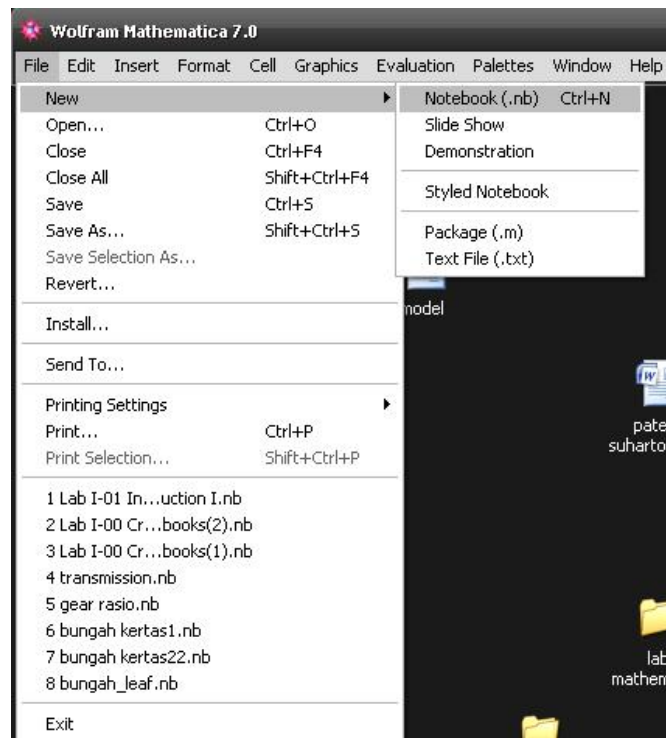
1.1 Menjalankan Mathematica

Pada Flatform windows, seperti biasa, icon Mathematica akan ada di tombol Start > All Programs > Mathematica. Perintah dapat langsung dijalankan dengan menulis pada Command Windows / Editor.

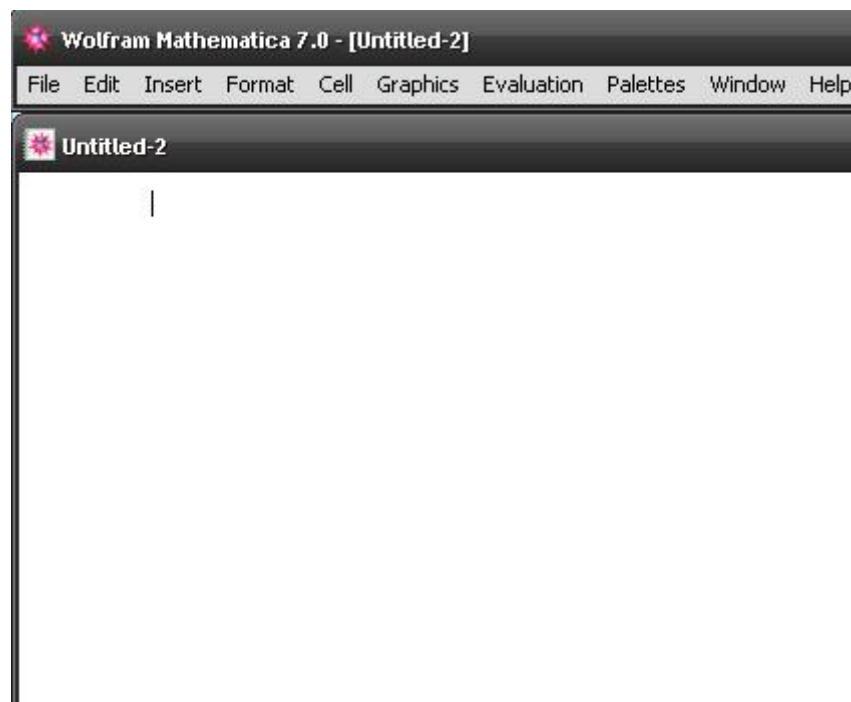
1.2 Command Window/Editor

Cara menampilkan Command Window/Editor adalah :

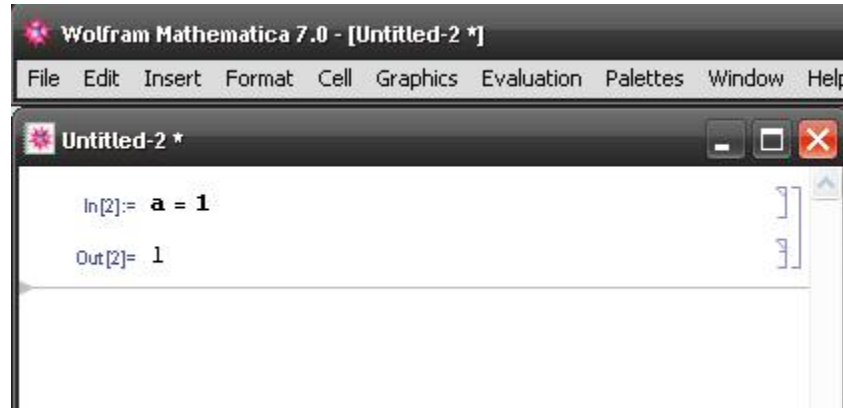
1. Klik pada menu File
2. Sorot pada New
3. Kemudian geser ke kanan klik pada menu Notebook(.nb) Ctrl+N



Kemudian akan muncul jendela Command Window



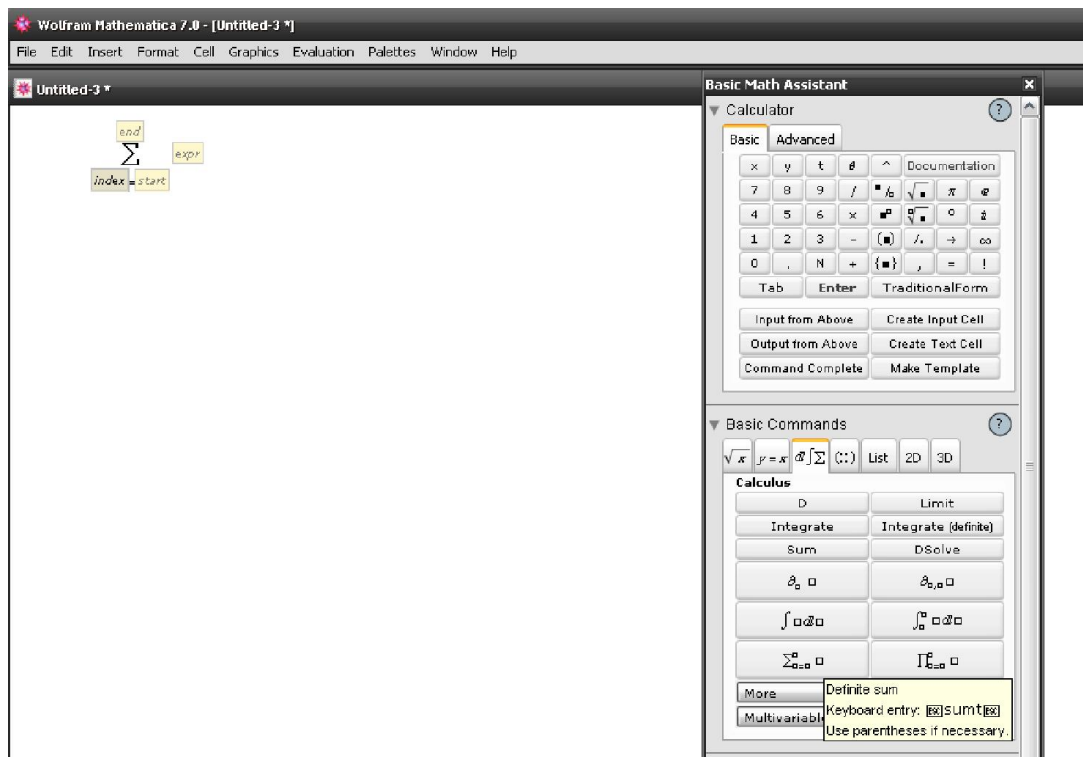
Command Window digunakan untuk menjalankan perintah dengan mengetikkan barisan ekspresi. Untuk menjalankan perintah dengan melakukan tombol “Shift + Enter” di keyboard secara bersama. Yang akan menghasilkan tanda In[1] dan Out[1] pada sebelah kiri shell.



1.3 Toolbar Palletes

Palletes adalah alat bantu editor untuk persamaan. Palletes dapat dikeluarkan dengan cara:

1. klik File
2. sorot Palletes
3. masuk pada bagian kanan.
4. pilih palletes yang diinginkan dan klik.



Penggunaan notasi pada palletes bias digunakan untuk teks juga bisa digunakan untuk input. Misalkan ada notasi matematika adalah

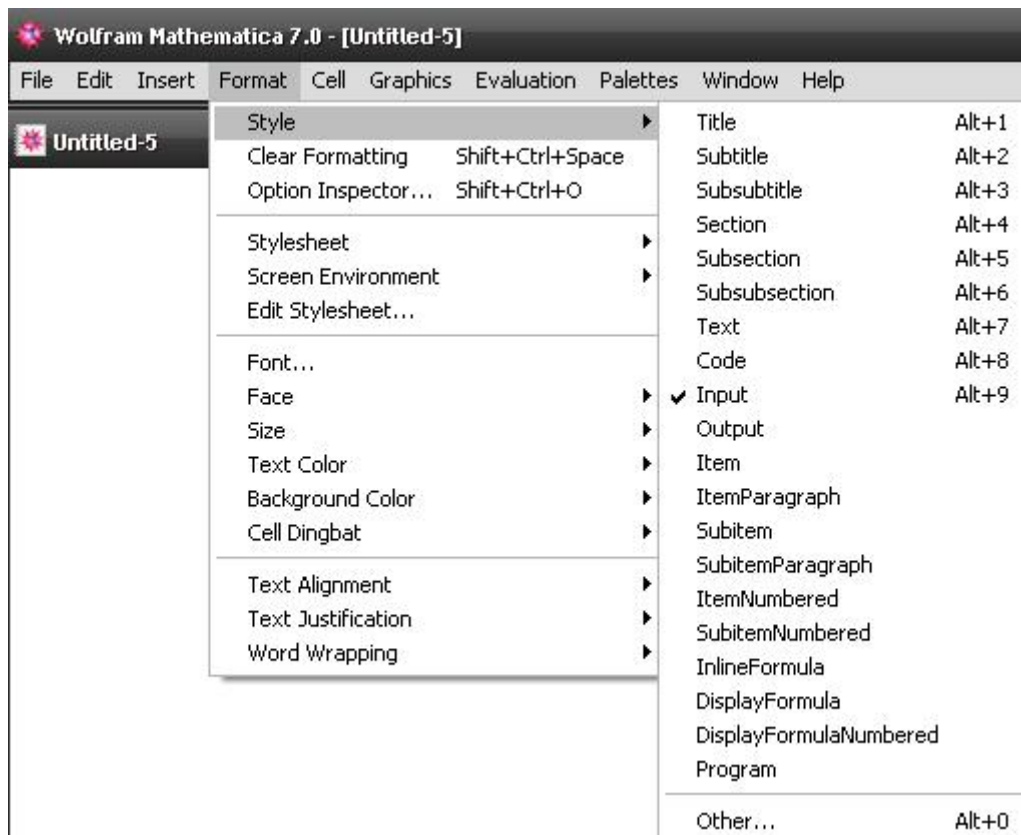
$$\sum_{i=1}^{10} i^2$$

Maka penulisan dalam notasi Mathematica Wolfram dapat diketikkan sebagai script dan untuk menghasilkan perintah tekan tombol “Shift + Enter”, sehingga hasil yang didapat pada Command Windows.

```
In[5]:= Sum[i^2, {i, 1, 10}]
Out[5]= 385
```

1.4 Toolbar Format

Format yang ada dalam toolbar memungkinkan pengguna Mathematica memiliki default yang biasa digunakan dalam penulisan standar matematika. Fungsi-fungsi yang ada dalam format seperti Style Sheet dan Style memiliki librari yang biasa digunakan oleh matematikawan dalam menuliskan artikel, presentasi, atau mengajar.



Contoh untuk worksheet ini yang digunakan adalah:

1. Style Sheet : TutorialBook

2. Style yang digunakan antara lain:

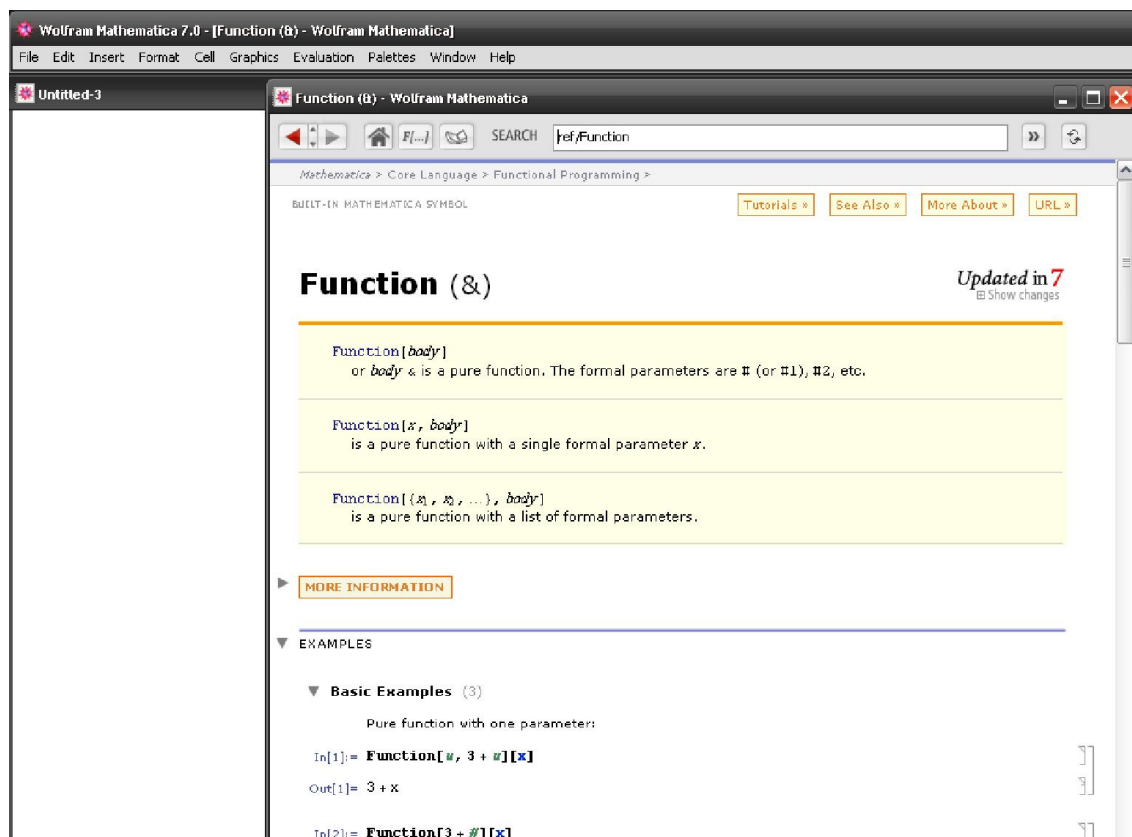
- Title
- Section
- Subsection
- Text
- Input
- dll

Apa fungsi dalam toolbar yang akan digunakan sangat terkait dengan kebutuhan dan pilihan pengguna pada saat memakai Mathematica ini.

1.5 Help Browser

Untuk menunjang pemakaian sebuah software, biasanya software tersebut dilengkapi dengan help dan manual online. Untuk software Mathematica, beberapa hal yang dapat dikatakan sebagai keunggulan adalah:

1. Manual penggunaan Mathematica dapat didownload di Information Center on Web yang terdapat dalam toolbar Help
2. Dedikasi yang sangat tinggi dari pencipta Mathematica yakni Stephen Wolfram untuk mengembangkan ilmu pengetahuan dengan mengembangkan Wolfram Research Center yang juga dapat dilihat di Wolfram Research on Web Help yang digunakan, hal yang sama dapat dijumpai pada kebanyakan software matematika, sangat menunjang dan memuat banyak contoh.



1.6 Aritmatika dan variabel

Mathematica menggunakan operator-operator normal $+$, $-$, $/$, dan $*$ untuk operasi-operasi aritmatika, dan $^$ untuk pangkat.

Simbol	Fungsi
+	Operasi penjumlahan
-	Operasi pengurangan
/	Operasi pembagian
*	Operasi perkalian
^	Operasi pangkat
.	Tanda titik, menyatakan koma pada bilangan pecahan

Contoh :

$$2 + 3$$

$$35/7$$

Notasi operasi aritmatika dalam Mathematica dengan satu input sel dan satu output dapat dilihat sebagai berikut :

```
In[8]:= 2 + 3
Out[8]= 5

In[9]:= 35 / 7
Out[9]= 5
```




Mathematica dapat menghitung pada satu input sel dengan terlebih dahulu menekan "enter".

Notasi operasi aritmatika dalam Mathematica dapat dilihat sebagai berikut :

```
In[10]:= 2 + 3
          35 / 7
Out[10]= 5

Out[11]= 5
```



Karena Mathematica kebanyakan bekerja secara simbolis, maka banyak konstanta ditulis dengan simbol misalkan p dan e.

Ekspresi	Fungsi
N[ekspresi, a]	a menyatakan digit bilangan di belakang koma. Contoh: N[Pi, 40], N[Sqrt[7],30], N[Exp[Pi*Sqrt[163]], 10]
Sqrt[x]	Akar pangkat dua dari x
Exp[x]	Fungsi eksponen dari x
Log[x]	Logaritma natural dengan basis e (lnx)
Log[b, x]	Logaritma biasa dengan basis b
Sin[x], Cos[x], Tan[x]	Fungsi trigonometri
ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x]	Fungsi inversi trigonometri
n!	Fungsi faktorial
Pi	Konstanta phi
Abs[x]	Nilai mutlak dari x
Round[x]	Pembulatan x ke bilangan bulat terdekat
FactorInteger[n]	Faktor-faktor prima dari bilangan bulat n

Fungsi	Keterangan
$x + yi$	Bilangan kompleks $z = x + yi$
Re[z]	Bagian real z
Im[z]	Bagian Imajiner z
Conjugate[z]	Konjugat (kesekawanan) bilangan z
Abs[z]	Nilai mutlak atau modulus z
Arg[z]	Argumen dari z

Untuk mendapatkan nilai numeriknya dapat diketik ;

```
In[12]:= N[Pi, 100]
```

```
Out[12]= 3.141592653589793238462643383279\
5028841971693993751058209749445\
9230781640628620899862803482534\
2117068
```

```
In[3]:= N[Sin[ $\frac{\pi}{10}$ ]]
```

```
Out[3]= 0.309017
```

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal :

Latihan Kerja Mahasiswa :

1. $\frac{3}{2} + 9 - 2x4$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

2. $\sqrt{5 - \frac{2}{3}}$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

3. Dapatkan nilai decimal dari $\pi^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{5})$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

4. Dapatkan nilai decimal dengan pendekatan 20 digit dari $\ln(17)$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

5. Dapatkan nilai decimal dengan pendekatan 7 digit dari $\frac{45}{77} \cdot \ln(9) \cdot \sqrt[3]{19}$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

1.7 Operasi Aljabar

Mathematica dapat melakukan perhitungan aljabar yang memberi hasil simbolik.

1. Expand

Perintah ini digunakan untuk menentukan hasil perkalian dua persamaan $(x - 3)(x + 7)$

```
In[4]:= Expand[(x - 3) (x + 7)]
```

```
Out[4]= -21 + 4 x + x2
```

2. Factor

Perintah ini digunakan untuk memfaktorkan hasil yang baru saja diperoleh $-21 + 4x + x^2$

```
In[8]:= Factor[-21 + 4 x + x2]
```

```
Out[8]= (-3 + x) (7 + x)
```

3. Simplify

Perintah ini digunakan untuk menyederhanakan penambahan / pengurangan dua persamaan

$$(3x^2 + 7x - 2) - (5x^2 + 3x - 8)$$

```
In[9]:= Simplify[(3 x2 + 7 x - 2) - (5 x2 + 3 x - 8)]
```

```
Out[9]= 6 + 4 x - 2 x2
```

4. Together

Perintah ini digunakan untuk menggabungkan pecahan ke dalam penyebut tunggal contoh untuk

$$persamaan \ x + \frac{3}{x} - \frac{1}{5}$$

```
In[10]:= Together[x +  $\frac{3}{x}$  -  $\frac{1}{5}$ ]
```

```
Out[10]=  $\frac{15 - x + 5 x^2}{5 x}$ 
```

5. Apart

Perintah ini digunakan untuk menguraikan pecahan dalam pecahan parsialnya contoh untuk

$$persamaan \ \frac{7x^3-5x^2+8x-2}{x^2+3x+2}$$

```
In[11]:= Apart[ $\frac{7x^3 - 5x^2 + 8x - 2}{x^2 + 3x + 2}$ ]
Out[11]=  $-26 + 7x - \frac{22}{1+x} + \frac{94}{2+x}$ 
```

6. Reduce

Perintah ini digunakan untuk menyederhanakan pernyataan logis (persamaan dan pertidaksamaan) contoh untuk menyelesaikan ketaksamaan dari $3x - 7 > 0$

```
In[15]:= Reduce[ $3x - 7 > 0$ , Reals]
Out[15]=  $x > \frac{7}{3}$ 
```

7. Solve

Perintah ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan contoh untuk menyelesaikan persamaan $2x^2 + 5x - 12 = 0$

```
In[12]:= Solve[ $2x^2 + 5x - 12 == 0$ , x]
Out[12]=  $\left\{ \{x \rightarrow -4\}, \left\{ x \rightarrow \frac{3}{2} \right\} \right\}$ 
```

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Latihan Kerja Mahasiswa

1. Cari hasil perkalian dari tiga persamaan berikut $(x + 2)^2(x - 1)^4(x + 5)$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

2. Cari faktor dari persamaan $6x^4 + 11x^3 - 56x^2 - x + 60$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

3. Cari penyelesaian persamaan $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x = 0$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

4. Cari penyelesaian dari pertidaksamaan $7x - 1 < 2x + 3$

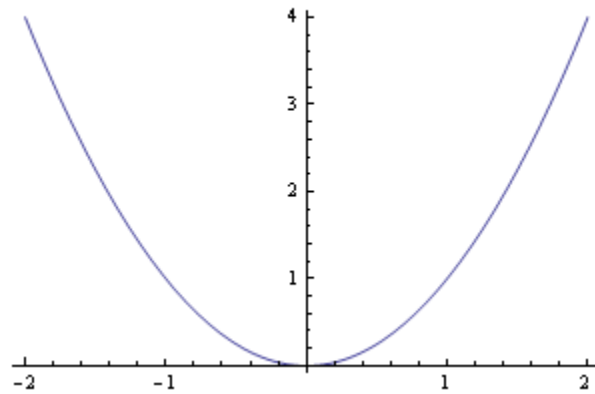
Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

1.8 Menggambar grafik

Suatu fungsi kontinu yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$, dimana $-2 < x < 2$. Maka untuk menggambarkan fungsi $f(x)$ dalam sistem koordinat kartesian, perintah yang digunakan dalam Mathematica Wolfram yaitu : **Plot[f(x),{x,batas min utk x, batas maks utk x}]**.

In[16]:= **Plot**[x^2 , {x, -2, 2}]

Out[16]=

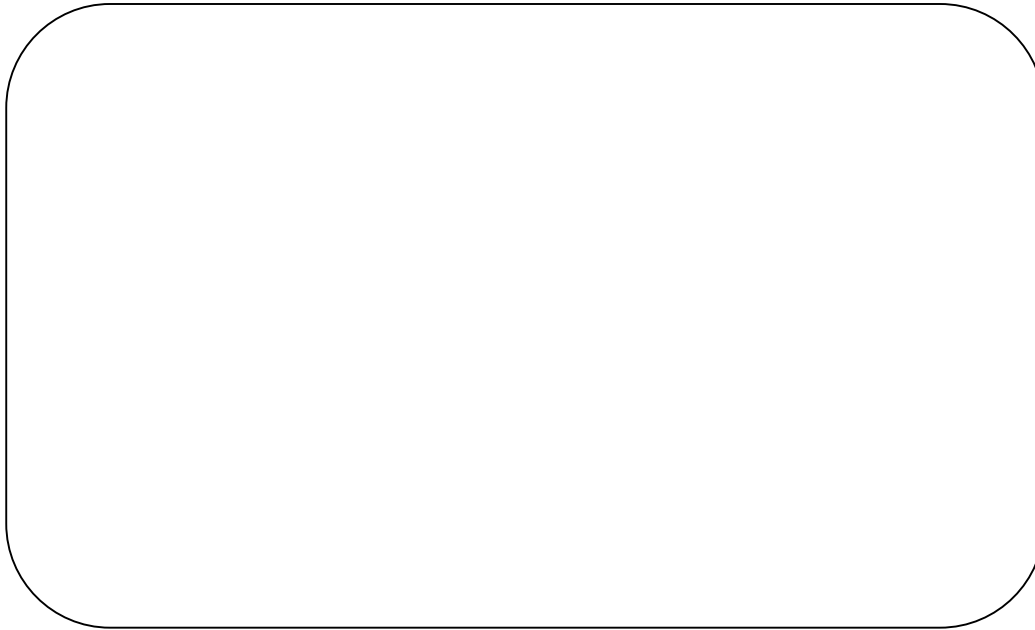


Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Latihan Kerja Mahasiswa

1. Dapatkan grafik dari fungsi $y = x^3 - 4x$, jika x berada dalam interval $-5 < x < 5$.

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram



2. Dapatkan grafik dari fungsi $y = 3x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 10$, jika x berada dalam interval $-10 < x < 10$.

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram



1.9 Daftar dan Tabel

Daftar adalah sekelompok elemen tertutup, dimana elemen tersebut terdapat dalam notasi { dan notasi }.

```
In[17]:= data1 = {12, 45, 17, 1}
```

```
Out[17]= {12, 45, 17, 1}
```

Perintah dalam Mathematica Wolfram untuk menunjukkan daftar elemen adalah Table.

Table[f(x),{x,batas min utk x, batas maks utk x}].

```
In[18]:= f[x_] := x2
```

```
data4 = Table[f[x], {x, 1, 10}]
```

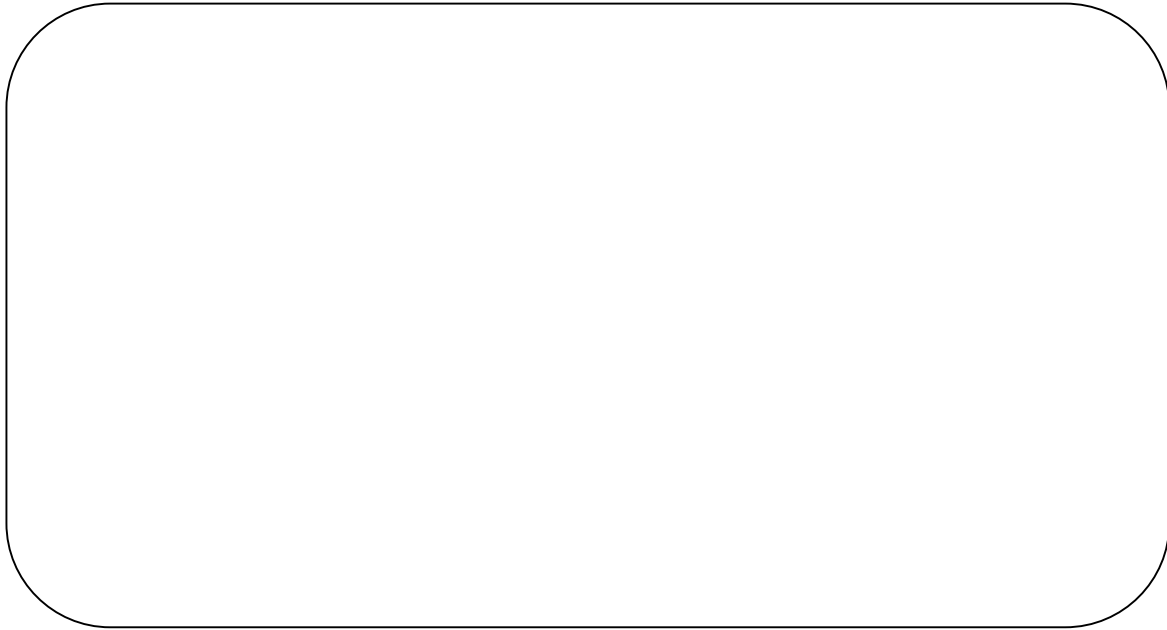
```
Out[19]= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}
```

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Latihan Kerja Mahasiswa

1. Buat daftar pasangan elemen x dan y dari persamaan $y = x^3$ dari nilai $-10 < x < 10$.

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram



1. Buat daftar pasangan elemen x dan y dari persamaan $y = 2x^3 + x^2 + 3$ dari nilai $-15 < x < 15$.

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram



BAB 2

PERTIDAKSAMAAN

2.1 Pertidaksamaan Linier Satu Variabel

Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan lambing, \geq , dan \leq . Pertidaksamaan linier dengan satu variable adalah suatu kalimat terbuka yang hanya memuat satu variable dengan derajad satu, yang dihubungkan oleh lambang $>$, \geq , dan \leq . Variablenya hanya satu yaitu y dan berderajad satu. Pertidaksamaan yang demikian disebut pertidaksamaan linier dengan satu variable (peubah).

Cara menyelesaikan pertidaksamaan linier satu variable :

- A. Jika pada suatu pertidaksamaan kedua ruasnya ditambah atau dikurang dengan bilangan yang sama, maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula.
- B. Jika pada suatu pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan positif, maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula.
- C. Jika pada suatu pertidaksamaan dikalikan dengan bilangan negatif, maka akan diperoleh pertidaksamaan baru yang ekuivalen dengan pertidaksamaan semula bila arah dari tanda ketidaksamaan dibalik.
- D. Jika pertidaksamaannya mengandung pecahan, cara menyelesaikannya adalah mengalikan kedua ruasnya dengan KPK penyebut-penyebutnya sehingga penyebutnya hilang.

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan himpunan penyelesaian $3x - 7 > 2x + 2$ jika x merupakan anggota $\{1, 2, 3, 4, \dots, 15\}$

Penyelesaian secara manual:

$$3x - 7 > 2x + 2; \text{ dimana } x \text{ adalah anggota himpunan dari } \{1, 2, 3, 4, \dots, 15\}$$

$$3x - 7 - 2x > 2x + 2 - 2x \text{ (kedua ruas dikurangi } 2x \text{)}$$

$$x - 7 > 2$$

$$x - 7 + 7 > 2 + 7 \text{ (kedua ruas ditambah } 7 \text{)}$$

$$x > 9$$

$$HP = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

In[3]:= Reduce [3 x - 7 > 2 x + 2, x, Reals]

Out[3]= x > 9

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $3x - 1 < x + 3$ dengan x variable pada himpunan bilangan cacah.

Penyelesaian secara manual:

$$3x - 1 < x + 3$$

$$3x - 1 + 1 < x + 3 + 1 \text{ (kedua ruas ditambah 1)}$$

$$3x < x + 4$$

$$3x + (-x) < x + (-x) + 4 \text{ (kedua ruas ditambah } -x)$$

$$\frac{1}{2}(2x < 4) \text{ (kedua ruas dikalikan } \frac{1}{2})$$

$$x < 2$$

Karena x anggota bilangan cacah maka yang memenuhi adalah $x < 2$ adalah $x = 0$ dan $x = 1$.

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $HP = \{ 0, 1 \}$.

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

In[4]:= Reduce [3 x - 1 > x + 3, x, Reals]

Out[4]= x > 2

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $4x - 7 < 3x - 5$

Penyelesaian secara manual:

$$4x - 7 < 3x - 5$$

$$4x - 3x < 7 - 5$$

$$x < 2$$

$$\frac{+ + + - - -}{2}$$

$$2$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram


```
In[1]:= Reduce [4 x - 7 < 3 x - 5, x, Reals]
```

```
Out[1]= x < 2
```

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $2x + 16 < x + 25$

Penyelesaian secara manual:

$$2x + 16 < x + 25$$

$$2x - x < 25 - 16$$

$$x < 9$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & - & - & - & \\ \hline \end{array}$$

$$9$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

```
In[2]:= Reduce [2 x + 16 < x + 25, x, Reals]
```

```
Out[2]= x < 9
```

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $7x - 1 \leq 10x + 4$

Penyelesaian secara manual:

$$7x - 1 \leq 10x + 4$$

$$7x - 10x \leq 1 + 4$$

$$-3x \leq 5$$

$$x \leq 5/3$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & - & - & - & \\ \hline \end{array}$$

$$5/3$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

```
In[5]:= Reduce [7 x - 1 > 10 x + 4, x, Reals]
```

```
Out[5]= x < - 5/3
```

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $6x - 10 \geq 5x - 16$

Penyelesaian secara manual:

$$6x - 10 \geq 5x - 16$$

$$6x - 5x \geq 10 - 16$$

$$x \geq -6$$

$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & + & + & + \\ \hline & & & & & -6 \end{array}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

In[6]:= Reduce [6 x - 10 >= 5 x - 16, x, Reals]

Out[6]= x >= -6

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $10x + 1 > 8x + 5$

Penyelesaian secara manual:

$$10x - 8x > 5 - 1$$

$$2x > 4$$

$$x > 2$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

In[7]:= Reduce [10 x + 1 > 8 x + 5, x, Reals]

Out[7]= x > 2

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $-6 < 2x + 3 < -1$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $3x + 2 < 5x + 1 < 16$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 + x - 12 < 0$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

4. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{x+5}{2x-1} \leq 0$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

5. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $(x + 2)(2x - 1)(3x + 7) \geq 0$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

Nama :

NIM :

Klas :

Tanggal

6. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{x-2}{x+4} < 2$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram

Soal – soal kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

1 $4x - 7 < 3x - 5$

2 $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$

3 $x^2 + x - 12 < 0$

4 $3x^2 - 11x - 4 \leq 0$

5 $\frac{x + 5}{2x - 1} \leq 0$

2.2 Nilai Mutlak

Definisi Nilai mutlak dari suatu bilangan x adalah jarak bilangan tersebut terhadap titik 0 pada garis bilangan, dengan tidak memperhatikan arahnya. Ini berarti $|x| = a$ memiliki dua penyelesaian, karena terdapat dua bilangan yang mempunyai jarak a terhadap 0 adalah $x = -a$ dan $x = a$.

Sifat-sifat Nilai Mutlak:

1. $|ab| = |a| |b|$

2. $|a/b| = |a|/|b|$

3. $|a+b| = |a| + |b|$

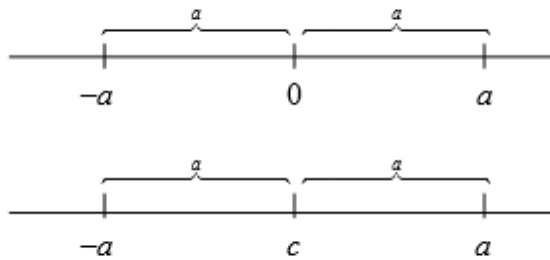
4. $|a-b| = ||a| - |b||$

Penyelesaian nilai mutlak dapat menggunakan pengkuadratan atau dengan teorema:

1. $|x| < a$ maka $-a < x < a$

2. $|x| > a$ maka $x < -a$ atau $x > a$

Secara fisis $|x|$ dapat menyatakan jarak x ke 0, sehingga x yang memenuhi $|x| < a$ menyatakan x yang jaraknya ke 0 kurang dari a . Secara fisis $|x - c|$ dapat menyatakan jarak x ke c , sehingga x yang memenuhi $|x - c| < a$ menyatakan x yang jaraknya c kurang dari a .



Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentuan penyelesaian dari $|x| < 3$

Penyelesaian secara manual :

$$|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

Jadi, penyelesaiannya adalah x yang memenuhi $-3 < x < 3$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

In[8]:= Reduce[Abs[x] < 3, x, Reals]

Out[8]= $-3 < x < 3$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan $|x - 2| < 3$

Penyelesaian secara manual :

$$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3$$

$$\Leftrightarrow -3 + 2 < x < 3 + 2$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 5$$

Jadi, penyelesaiannya adalah x yang memenuhi $-1 < x < 5$.

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

In[9]:= Reduce[Abs[x - 2] < 3, x, Reals]

Out[9]= $-1 < x < 5$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan penyelesaian dari pertidaksamaan $|3x - 5| \geq 1$

Penyelesaian secara manual :

$$|3x - 5| \geq 1 \Leftrightarrow 3x - 5 \leq -1 \text{ atau } 3x - 5 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq 4 \text{ atau } 3x \geq 6$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3} \text{ atau } x \geq 2$$

Jadi penyelesaian adalah x yang memenuhi $x \leq \frac{4}{3}$ atau $x \geq 2$.

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

In[11]:= Reduce [Abs[3 x - 5] ≥ 1, x, Reals]

Out[11]= $x \leq \frac{4}{3} \mid \mid x \geq 2$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Andai ebsilon (ε) adalah bilangan positif. Tunjukkan bahwa

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon$$

Penyelesaian secara manual :

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 5|x - 2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |5||x - 2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |5(x - 2)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon$$

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa

1. Tentukan penyelesaian nilai mutlak dari $|x + 1| < 4$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

2. Tentukan penyelesaian nilai mutlak dari $|2 - 4x| \geq 10$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

3. Tentukan penyelesaian nilai mutlak dari $\left| \frac{3x}{5} + 1 \right| > 6$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

4. Tentukan penyelesaian nilai mutlak dari $\left| \frac{1}{x} - 3 \right| > 6$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

$$1 \quad \left| 2 + \frac{5}{x} \right| > 1$$

$$2 \quad \left| 1 - \frac{3x}{5} \right| \leq 4$$

$$3 \quad |4x + 2| \geq 10$$

$$4 \quad \left| \frac{x}{3} - 2 \right| \leq 6$$

$$5 \quad |2 - 4x| \geq 10$$

BAB 3

FUNGSI

3.1 Definisi Fungsi

Dalam matematika, yang dimaksud dengan fungsi adalah aturan yang memetakan setiap objek x di suatu himpunan D (daerah asal) ke sebuah objek tunggal y di himpunan E (daerah hasil). Fungsi biasanya dilambangkan dengan huruf kecil seperti f atau g .

Lambang $f: D \rightarrow E$.

Berarti f adalah fungsi dari D ke E . Fungsi yang akan dibahas disini adalah fungsi dengan daerah asal $D \subseteq \mathbb{R}$ dan daerah hasil $E \subseteq \mathbb{R}$, yang sering dinyatakan dalam bentuk persamaan seperti $y = x^2$ atau $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Sebuah fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang memasangkan setiap anggota x himpunan A ke himpunan B tepat satu anggota. A disebut **domain** (daerah asal) sedangkan B disebut **kodomain** (daerah kawan). Sedangkan setiap himpunan B yang memperoleh pasangan dari himpunan A disebut **Range** (daerah hasil).

3.2 Sifat-sifat Fungsi

Jika f dan g dua fungsi jumlah $f+g$, selisih $f-g$, hasil kali fg , hasil bagi f/g dan perpangkatan f^n adalah fungsi-fungsi dari dengan daerah asal berupa irisan dari daerah asal f dan daerah hasil g , dan dirumuskan sebagai berikut.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ asalkan } g(x) \neq 0$$

Jika f dan g dua fungsi dengan dua daerah asal g merupakan hasil f maka komposisi $g \circ f$ memenuhi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

3.3 Notasi Fungsi pada Mathematica

Penggunaan notasi Fungsi dalam Mathematica adalah menggunakan awalan huruf besar dan selalu menggunakan tanda kurung siku [dan].

Contoh fungsi akar kuadrat

```
In[1]:= Sqrt [5]
```

```
Out[1]=  $\sqrt{5}$ 
```

Mendefinisikan fungsi sendiri pada Mathematica

Untuk mendefinisikan fungsi $f(x) = x^2$ maka notasi Mathematica dapat ditulis dengan perintah sebagai berikut:

```
In[2]:= f [x_] = x^2
```

```
Out[2]=  $x^2$ 
```

Underscore dikiri x menyatakan bahwa fungsi f memiliki variabel x. Untuk menuliskan fungsi atau variabel lebih baik dengan menggunakan huruf kecil karena Mathematica memiliki fungsi dengan huruf kapital. Sedangkan untuk fungsi dua atau lebih dari dua variabel yaitu $f(u, v) = u/v$ maka notasi Mathematica dapat ditulis dengan perintah sebagai berikut :

```
In[4]:= g [u_, v_] = u / v
```

```
Out[4]=  $\frac{u}{v}$ 
```

Contoh Soal dan Pembahasannya. Untuk $f(x) = x^2 - 2x$, carilah dan sederhanakan :

- $f(4)$
- $f(4+h)$
- $f(4+h) - f(4)$
- $\frac{f(4+h) - f(4)}{h}$ dengan $h \neq 0$

Penyelesaian secara manual :

- $$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f(4) = 4^2 - 2.4$$

$$f(4) = 16 - 8$$

$$f(4) = 8$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[13]:= f[x_] := x^2 - 2 x  
f[4]
```

```
Out[14]= 8
```

Penyelesaian secara manual :

b. $f(x) = x^2 - 2x$

$$f(4 + h) = (4 + h)^2 - 2 \cdot (4 + h)$$

$$f(4 + h) = (h^2 + 8h + 16) - (8 + 2h)$$

$$f(4 + h) = (h^2 + 6h + 8)$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[19]:= f[x_] := x^2 - 2 x  
f[4 + h]  
Expand[f[4 + h]]
```

```
Out[20]= -2 (4 + h) + (4 + h)^2
```

```
Out[21]= 8 + 6 h + h^2
```

Penyelesaian secara manual :

c. $f(x) = x^2 - 2x$

$$f(4 + h) - f(4) = (h^2 + 6h + 8) - (8)$$

$$f(4 + h) - f(4) = (h^2 + 6h)$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[24]:= f[x_] := x^2 - 2 x  
f[4 + h] - f[4]  
Expand[f[4 + h] - f[4]]
```

```
Out[25]= -8 - 2 (4 + h) + (4 + h)^2
```

```
Out[26]= 6 h + h^2
```

Penyelesaian secara manual :

d. $\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{(h^2+6h)}{h} = \frac{h(h+6)}{h} = h + 6$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[27]:= f[x_] := x^2 - 2 x
          (f[4 + h] - f[4]) / h
          Expand[(f[4 + h] - f[4]) / h]
```

```
Out[28]= 
$$\frac{-8 - 2(4 + h) + (4 + h)^2}{h}$$

```

```
Out[29]= 6 + h
```

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa :

1. Fungsi $f(x) = 3x^3 + x$, hitunglah nilai dari masing-masing

a. $f(1)$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

b. $f\left(\frac{1}{x}\right)$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan dengan menggunakan software Wolfram Mathematica :

¹ Fungsi $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 7$, hitunglah nilai dari masing-masing

a. $f(3)$

b. $f\left(\frac{1}{a}\right)$

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

1. Jika $f(x) = x^2 + x$ dan $g(x) = \frac{2}{x+3}$ tentukan :

a. $(f+g)(2)$

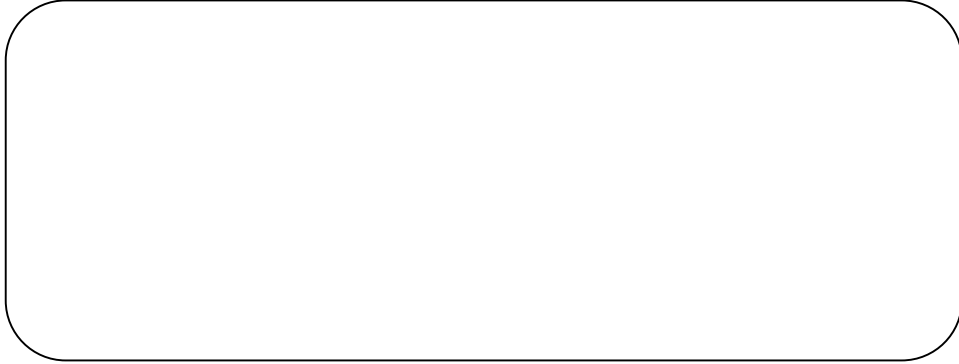
Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

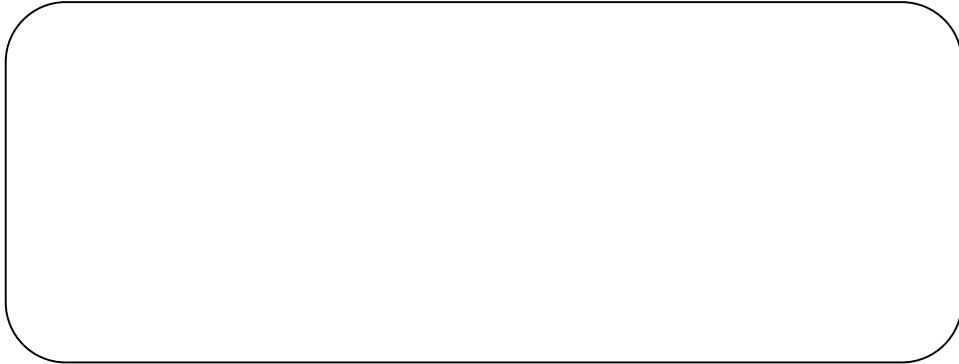
Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

b. $(f-g)(2)$

Penyelesaian secara manual :



Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :



Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

c. $(fg)(1)$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

d. $(f/g)(1)$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Nama :

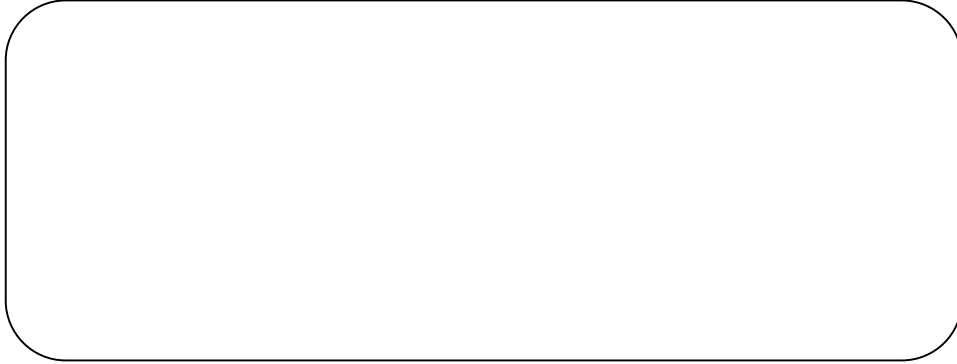
NIM :

Klas :

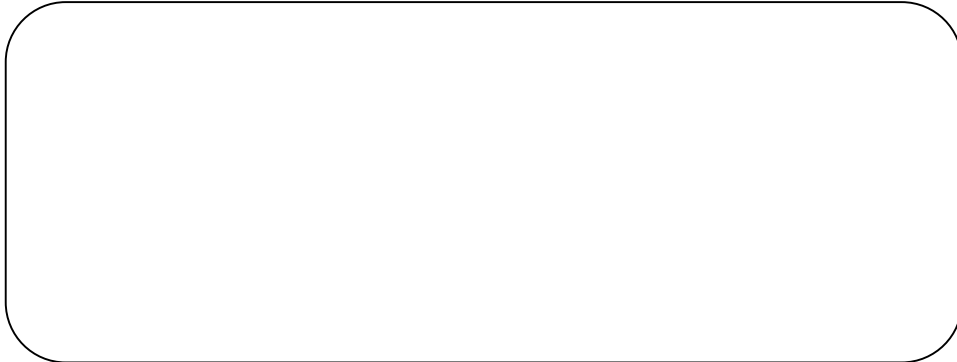
Tanggal

e. $(g \circ f)(1)$

Penyelesaian secara manual :



Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :



Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

f. $(f \circ g)(1)$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan dengan menggunakan software Wolfram Mathematica :

¹ Jika $f(x) = x^2 + x + 8$ dan $g(x) = \frac{2}{(2x+3)^2}$ tentukan , hitunglah nilai dari masing-masing

- a. $(f+g)(2)$
- b. $(f-g)(2)$
- c. $(fg)(2)$
- d. $(f/g)(2)$
- e. $(g \circ f)(2)$
- f. $(f \circ g)(2)$

BAB 4

LIMIT FUNGSI

4.1 Teorema Limit

Pengertian Limit adalah mendekati. Maka limit dari $f(x)$ saat x mendekati a , dapat ditulis dengan notasi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, dimana nilai L adalah nilai dari $f(x)$, dimana nilai x adalah cukup dekat dengan a tetapi tidak sama dengan a .

Untuk mendapatkan nilai $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, dengan cara mengevaluasi $f(x)$ pada x cukup dekat dengan 3 tetapi tidak sama dengan 3. Untuk mengevaluasi nilai limit dari pendekatan sebelah sebelah kiri, akan dipilih nilai x adalah 2.9, 2.99, 2.999, dan seterusnya. Perhatikan bahwa nilai $2.9 = 3 - 1/10 = 3 - 10^{-1}$, $2.99 = 3 - 1/100 = 3 - 10^{-2}$, dan $2.999 = 3 - 1/1000 = 3 - 10^{-3}$. Untuk menggeneralisasi, dapat menggunakan notasi dalam bentuk $3 - 10^{-n}$ (dimana $n \geq 0$) untuk menjelaskan limit terhadap x sama dengan 3 dari sebelah kiri. Demikian juga, dapat menggunakan notasi nilai dalam bentuk $3 + 10^{-n}$ untuk mengevaluasi nilai limit dari pendekatan sebelah sebelah kanan.

Contoh Soal dan Pembahasannya. Dapatkan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 7)$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[1]:= Clear[f, x, a, n]
f[x_] := 3 x - 7
a = 3;
data = N[Table[{a - 10-n, f[a - 10-n], a + 10-n, f[a + 10-n]},
{n, 0, 5}]];
TableForm[data, TableHeadings -> {None, {"x", "f(x)", "x", "f(x)"}}]
```

Out[5]//TableForm=

x	f(x)	x	f(x)
2.	-1.	4.	5.
2.9	1.7	3.1	2.3
2.99	1.97	3.01	2.03
2.999	1.997	3.001	2.003
2.9999	1.9997	3.0001	2.0003
2.99999	1.99997	3.00001	2.00003

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa.

Dapatkan sebuah tabel dan evaluasi limit dari $\text{Limit}_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$.

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :



Soal – soal dibawah ini kerjakan dengan menggunakan software Wolfram Mathematica :

- 1 Dapatkan sebuah tabel dan evaluasi limit dari $\text{Limit}_{x \rightarrow 3} (3x - 7)$
- 2 Dapatkan sebuah tabel dan evaluasi limit dari $\text{Limit}_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

Dari uraian diatas dapat diambil kesimpulan bahwa limit $f(x)$ mendekati c adalah L , ditulis $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$. Jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (betapapun kecilnya), terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Contoh Soal dan Pembahasannya. Buktikan bahwa nilai dari **$\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 7) = 5$**

Penyelesaian secara manual :

Misalkan $\varepsilon > 0$ sembarang, kita harus dapat menemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga apabila $0 < |x - 4| < \delta$ berlaku $|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$

Perhatikan $|(3x - 7) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |(3x - 12)| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |3|(x - 4)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Oleh karena itu dapat dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa

Buktikan bahwa nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 7$

Penyelesaian secara manual :

Soal – soal dibawah ini kerjakan dengan menggunakan software Wolfram Mathematica :

- 1 Dapatkan sebuah tabel dan evaluasi limit dari $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x} = 2$
- 2 Dapatkan sebuah tabel dan evaluasi limit dari **Limit** $\frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 7$

4.2 Cara menyelesaikan limit fungsi

Menghitung limit fungsi di suatu titik dengan menggunakan definisi dan pembuktian seperti yang telah diuraikan di atas adalah pekerjaan rumit. Semakin rumit bentuk fungsinya, semakin rumit pula masalah yang dihadapi. Untuk itu berikut ini diberikan suatu rangkaian teorema, rumus-rumus menghitung limit di suatu titik dengan cara sederhana.

Teorema :

- a. Jika m dan n konstanta, maka $\lim_{x \rightarrow a} (mx + n) = ma + n$
- b. $\lim_{x \rightarrow a} a = a$
- c. Jika m suatu konstanta maka $\lim_{x \rightarrow a} m = m$
- d. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
- e. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, a \geq 0$
- f. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}, a \neq 0$

Operasi Pada Limit Fungsi

Misalkan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = N$, maka:

- a. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M + N$
- b. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M - N$
- c. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = MN$
- d. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{M}{N}$, asalkan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
- e. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{M}$, dengan n bilangan positif dan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$
- f. Teorema akibat $\lim_{x \rightarrow a} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kM$ $k = \text{konstanta}$.

Contoh Soal dan Pembahasannya. Carilah nilai $\lim_{x \rightarrow 3} 5x^2$

Penyelesaian secara manual :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} 5x^2 &= 5 \lim_{x \rightarrow 3} x^2 \\ &= 5[\lim_{x \rightarrow 3} x]^2 \\ &= 5(3)^2 \\ &= 45\end{aligned}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[6]:= Limit[5 x^2, x -> 3]
Out[6]= 45
```

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa.

Carilah nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 - 3)(7x^3 + 2x)$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan dengan menggunakan software Wolfram Mathematica :

- 1 Carilah nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} (4x^3 - 3)(7x^2 + 2x)$
- 2 Carilah nilai dari $\lim_{x \rightarrow 3} (4x^3 - 7x^2 + 2x - 3)(x^2 + 1)$

4.3 Fungsi Polinom

Misalkan $P_n(x)$ dan $P_m(x)$ adalah polinom-polinom (suku banyak) dengan:

$$P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_1 x + c_0 \quad \text{dan}$$

$$P_m(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + c_{m-2} x^{m-2} + \dots + c_1 x + c_0$$

$c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_0$ dan $c_m, c_{m-1}, c_{m-2}, \dots, c_0$ adalah konstanta yang merupakan koefisien-koefisien polinom, maka

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow a} P_n(x) = P_n(a) \quad ; a \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \frac{P_n(a)}{P_m(a)} ; P_m(a) \neq 0$$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Carilah nilai dari $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^4 - 8}{x^3 + 24}$

Penyelesaian secara manual :

$$\Rightarrow \frac{3(-2)^4 - 8}{(-2)^3 + 24}$$

$$\Rightarrow \frac{3 \cdot 16 - 8}{-8 + 24}$$

$$\Rightarrow \frac{40}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

$$\begin{array}{l} \text{In[1]:= Limit}\left[\frac{3x^4 - 8}{x^3 + 24}, x \rightarrow -2\right] \\ \text{Out[1]= } \frac{5}{2} \end{array}$$

Nama :

NIM :

Klas :

Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa.

Carilah nilai dari $\lim_{w \rightarrow -2} \frac{(w+2)(w^2-w-6)}{w^2+4w+4}$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan dengan menggunakan software Wolfram Mathematica :

1 Carilah nilai dari $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^4-8}{x^3+24}$

2 Carilah nilai dari $\lim_{w \rightarrow -2} \frac{(w+2)(w^2-w-6)}{w^2+4w+4}$

BAB 5

TURUNAN FUNGSI

5.1 Pengertian Turunan Fungsi

Turunan fungsi f adalah fungsi f' yang nilainya di c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada. Jika f mempunyai turunan di setiap x anggota domain maka :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika $y = f(x)$ turunan y atau turunan f dapat dinotasikan dengan y' , atau $\frac{dy}{dx}$, atau $f'(x)$, atau $\frac{d(f(x))}{dx}$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Jika $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$, maka turunan f adalah

Penyelesaian secara manual :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 2(x+h) + 4 - (3x^2 + 2x + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) + 2x + 2h + 4 - 3x^2 - 2x - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 2x + 2h + 4 - 3x^2 - 2x - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x + 3h + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h + 2) \\ &= 6x + 2 \end{aligned}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[7]:= Clear[f, x, h]
f[x_] := 3 x^2 + 2 x + 4
difquo = (f[x + h] - f[x]) / h
Expand[difquo]
deriv = Limit[difquo, h -> 0]

Out[9]= 
$$\frac{-2x - 3x^2 + 2(h+x) + 3(h+x)^2}{h}$$


Out[10]=  $2 + 3h + 6x$ 

Out[11]=  $2 + 6x$ 
```

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa

Jika $f(x) = 3x^8 - 5x^6 + x^4 - x + 11$, maka turunan dari $f(x)$ adalah

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

1 $y = 3x^4 + 2x^2 + x$

2 $y = x^3 + 3x^2$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Jika $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$, maka turunan f di $x = 2$ adalah

Penyelesaian secara manual :

$$\begin{aligned}
 F'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 + 2(2+h) + 4 - (3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 4)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(4 + 4h + h^2) + 4 + 2h + 4 - (12 + 4 + 4)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 3h^2 + 2h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12 + 3h + 2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 3h + 2) \\
 &= 14
 \end{aligned}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```

In[1]:= Clear[f, x, h]
f[x_] := 3 x^2 + 2 x + 4
difquo = (f[x + h] - f[x]) / h
Expand[difquo]
deriv = Limit[difquo, h -> 0]
deriv /. x -> 2

Out[3]= (-2 x - 3 x^2 + 2 (h + x) + 3 (h + x)^2) / h

Out[4]= 2 + 3 h + 6 x

Out[5]= 2 + 6 x

Out[6]= 14

```

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja mahasiswa

Jika $f(x) = 3x^8 - 5x^6 + x^4 - x + 11$, maka turunan dari $f(x)$ di $x = 3$ adalah

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

- 1 $y = 3x^4 + 2x^2 + x$ maka turunan dari $f(x)$ di $x = 4$ adalah
- 2 $y = x^3 + 3x^2$ maka turunan dari $f(x)$ di $x = 3$ adalah

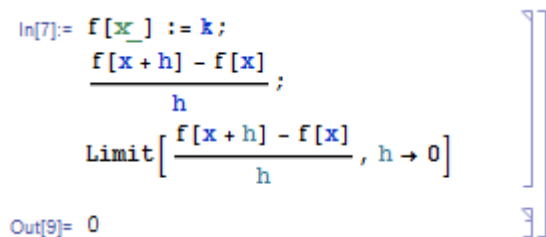
5.2 Turunan Fungsi Konstanta Dan Pangkat

1. Jika $f(x) = k$ dengan k konstan untuk setiap x (fungsi f adalah konstan), maka $f'(x) = 0$.

Bukti secara manual :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :



The screenshot shows the following input and output in Wolfram Mathematica:

```

In[7]:= f[x_] := k;
        f[x+h] - f[x]
        -----
        h
        Limit[ f[x+h] - f[x] , h -> 0 ]
Out[9]= 0
  
```

2. Jika $f(x) = x$ untuk setiap x (fungsi f adalah identitas), maka $f'(x) = 1$.

Bukti secara manual :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```

In[10]:= f[x_] := x;
          f[x+h] - f[x]
          h
          Limit[ , h -> 0]
Out[12]= 1

```

3. Jika $f(x) = x^n$ dengan n bilangan bulat positif, untuk setiap x , maka $f'(x) = nx^{n-1}$.

Bukti secara manual :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1})}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} \\
 &= nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```

In[6]:= f[x_] := x^n
          f[x+h] - f[x]
          h
          Limit[ , h -> 0]
Out[7]= -x^n + (h+x)^n
          h
Out[8]= n x^{-1+n}

```

Contoh Soal dan Pembahasannya. Jika $f(x) = x^5$, maka turunan dari fungsi f adalah

Penyelesaian secara manual :

$$f(x)' = 5x^{5-1}$$

$$f(x)' = 5x^4$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[1]:= Clear[f, x, h];
      f[x_] := x^5;
      difquo = (f[x + h] - f[x]) / h
      difquo = Expand[difquo]
      deriv = Limit[difquo, h -> 0]

Out[3]= (-x^5 + (h + x)^5) / h

Out[4]= h^4 + 5 h^3 x + 10 h^2 x^2 + 10 h x^3 + 5 x^4

Out[5]= 5 x^4
```

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa

Jika $f(x) = 5x^6 - 2x^4 + x^3 - 8x + 3$, maka turunan dari fungsi $f(x)$ adalah

Penyelesaian secara manual :



Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :



Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

- 1 $y = 3x^4 + 2x^2 + a x$
- 2 $y = abx^3 + 3x^2$

5.3 Sifat – sifat Turunan

Jika k suatu konstanta, f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, u dan v fungsi – fungsi dalam x sehingga $u = f(x)$ dan $v = g(x)$ maka berlaku :

1. Jika $y = ku$, maka $y' = k (u')$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[9]:= Clear[f, g, x]
        D[k * g[x], x]
Out[10]= k g'[x]
```

2. Jika $y = u + v$, maka $y' = u' + v'$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[11]:= Clear[f, g, x]
          D[f[x] + g[x], x]
Out[12]= f'[x] + g'[x]
```

3. Jika $y = u - v$, maka $y' = u' - v'$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[13]:= Clear[f, g, x]
          D[f[x] - g[x], x]
Out[14]= f'[x] - g'[x]
```

4. Jika $y = u v$, maka $y' = u'v + u v'$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```

In[15]:= Clear[f, g, x]
          D[f[x] * g[x], x]
Out[16]= g[x] f'[x] + f[x] g'[x]

```

5. Jika $y = \frac{u}{v}$, maka $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```

In[19]:= Clear[f, g, x]
          D[(f[x] / g[x]), x]
Out[20]= f'[x] / g[x] - f[x] g'[x] / g[x]^2

```

Contoh Soal dan Pembahasannya. jika $f(x) = (3x^5 + 2x)(4x + 7)$, maka turunan dari $f(x)$ adalah

Penyelesaian secara manual :

Jika $f(x) = g(x).h(x)$

$$g(x) = 3x^5 + 2x$$

$$h(x) = 4x + 7$$

$$g'(x) = 15x^4 + 2$$

$$h'(x) = 4$$

$$f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$$

$$f'(x) = (15x^4 + 2).(4x + 7) + (3x^5 + 2x).4$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```

In[1]:= Clear[f, x];
          f[x_] := (3 x^5 + 2 x) * (4 x + 7);
          D[f[x], x]
Out[3]= (7 + 4 x) (2 + 15 x^4) + 4 (2 x + 3 x^5)

```

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa

Jika $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$, maka turunan dari $f(x)$ adalah

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

$$1 \quad y = (3x^4 + 2x^2 + x)(x^2 + 7)$$

$$2 \quad y = (x^3 + 3x^2)(4x^2 + 2)$$

$$3 \quad y = \frac{1}{3x^2 + 1}$$

$$4 \quad y = \frac{1}{4x^2 - 3x + 9}$$

5.4 Aturan Rantai (untuk Turunan Fungsi Komposisi)

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposisi yang dirumuskan dengan

$y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di

$u = g(x)$ maka $y = (f \circ g)(x)$ terdiferensialkan di x dan

$$\begin{aligned} y' &= (f \circ g)'(x) \\ &= f'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Fungsi komposisi dapat diperluas menjadi komposisi 3 fungsi, 4 fungsi dan seterusnya.

Jika $y = f(u)$, maka $u = g(v)$, dan $v = h(x)$

yakni $y = (f \circ g \circ h)(x)$

maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan turunan $y = (3x^4 + 7x - 8)^9$

Penyelesaian secara manual :

Misalkan $u = 3x^4 + 7x^1 - 8x^0$

$$y = u^9$$

Untuk fungsi u , maka $\frac{du}{dx} = 3.4.x^{4-1} + 7.1.x^{1-1} - 8.0.x^{0-1}$

$$\frac{du}{dx} = 12x^3 + 7$$

Untuk fungsi y, maka $\frac{dy}{du} = 9u^{9-1}$

Maka untuk fungsi y, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 9u^{9-1} * (12x^3 + 7)$$

$$\frac{dy}{dx} = 9(3x^4 + 7x - 8)^8 * (12x^3 + 7)$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[27]:= Clear[f, x];
          f[x_] = (3 x^4 + 7 x - 8) ^ 9;
          D[f[x], x]
Out[29]= 9 (7 + 12 x^3) (-8 + 7 x + 3 x^4)^8
```

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa

Dapatkan turunan dari fungsi $y = \frac{1}{(4x^2+3x+9)^5}$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

$$1 \quad y = (3x^4 + 2x^2 + x)^4$$

$$2 \quad y = (x^3 + 3x^2)^2$$

$$3 \quad y = \frac{1}{(3x^2 + 1)^2}$$

$$4 \quad y = \frac{1}{(4x^2 - 3x + 2)^3}$$

5.5 Turunan Fungsi Implisit

Fungsi implisit secara umum dapat ditulis sebagai $f(x, y) = 0$ dengan y sebagai fungsi dalam x .

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi yang dirumuskan dengan $y - 5x^4 + 8x = 0$

Penyelesaian secara manual :

Apabila kedua ruas dari fungsi $y - 5x^4 + 8x = 0$ diturunkan terhadap x , maka diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} - 5 * 4x^{4-1} + 8 * 1x^{1-1} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - 20x^3 + 8 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 20x^3 - 8$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[38]:= dq = y - 5 x^4 + 8 x == 0;
          Dt[dq, x]
Out[38]= 8 - 20 x^3 + Dt[y, x] == 0
```

```
]]
]]
```

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

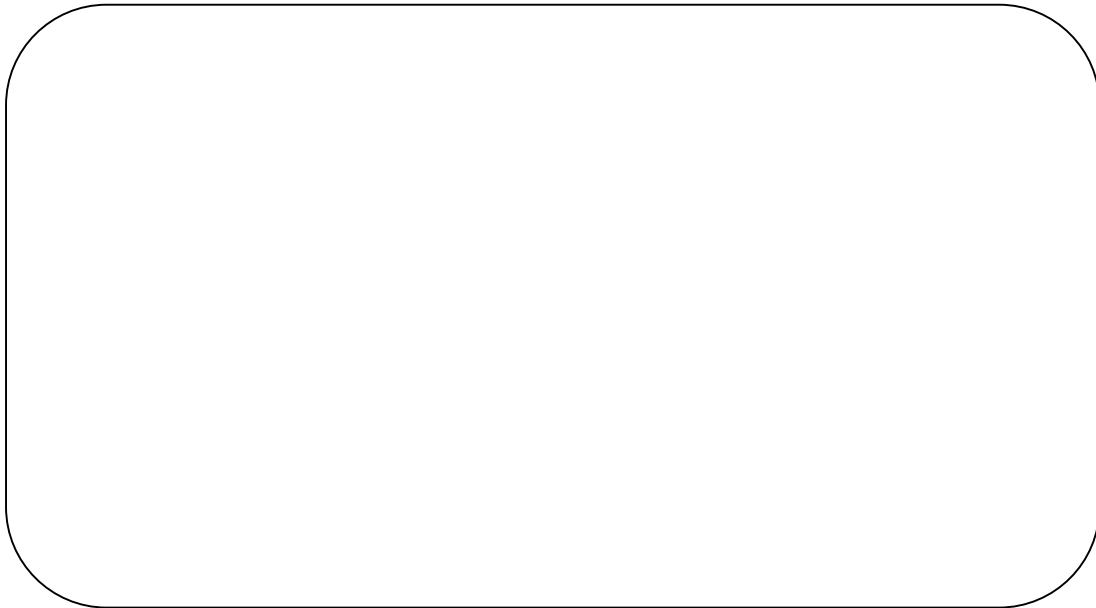
Lembar Kerja Mahasiswa

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi yang dirumuskan dengan $2x^5y - 9y - x^3 + 7 = 0$

Penyelesaian secara manual :



Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :



Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

- 1 Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi yang dirumuskan dengan $4x^3 + 11xy^2 - 2y^3 = 0$
- 2 Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi yang dirumuskan dengan $xy + \sin y = x^2$
- 3 Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi yang dirumuskan dengan $6x - \sqrt{2xy} + xy^3 = y^2$
- 4 Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi yang dirumuskan dengan $\cos(xy) = y^2 + 2x$

5.6 Turunan Tingkat Tinggi

Jika fungsi diturunkan maka turunannya, yaitu f' juga berupa fungsi sehingga boleh jadi f' mempunyai turunan tersendiri yang dinyatakan oleh $(f')' = f''$. Fungsi yang f'' baru ini disebut turunan kedua dari f karena dia merupakan turunan dari turunan f . Dengan notasi Leibniz kita tuliskan turunan kedua dari $y = f(x)$ sebagai

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Notasi lain adalah $f''(x) = D^2f(x)$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Jika $f(x) = 3x^4 + 7x - 8$, tentukan $f''(x)$.

Penyelesaian secara manual :

$$f'(x) = 12x^3 + 7$$

untuk mencari $f''(x)$ kita turunkan $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} (12x^3 + 7) \\ &= 36x^2 \end{aligned}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

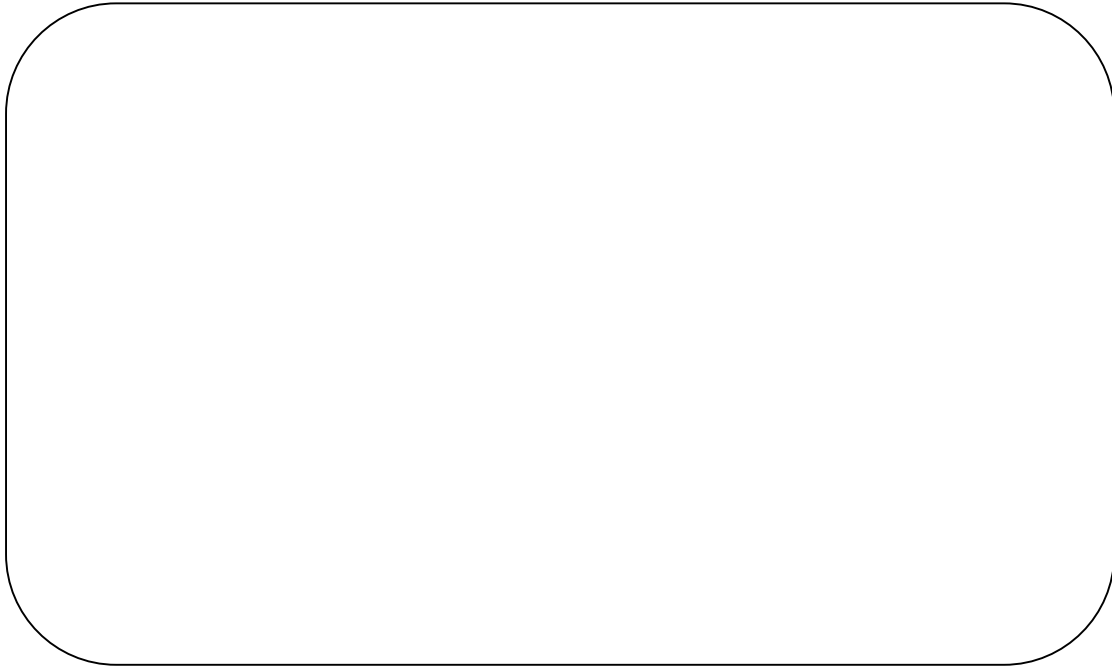
```
In[40]:= Clear[f, x];
          f[x_] := 3 x^4 + 7 x - 8;
          D[f[x], {x, 2}]
Out[42]= 36 x^2
```

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

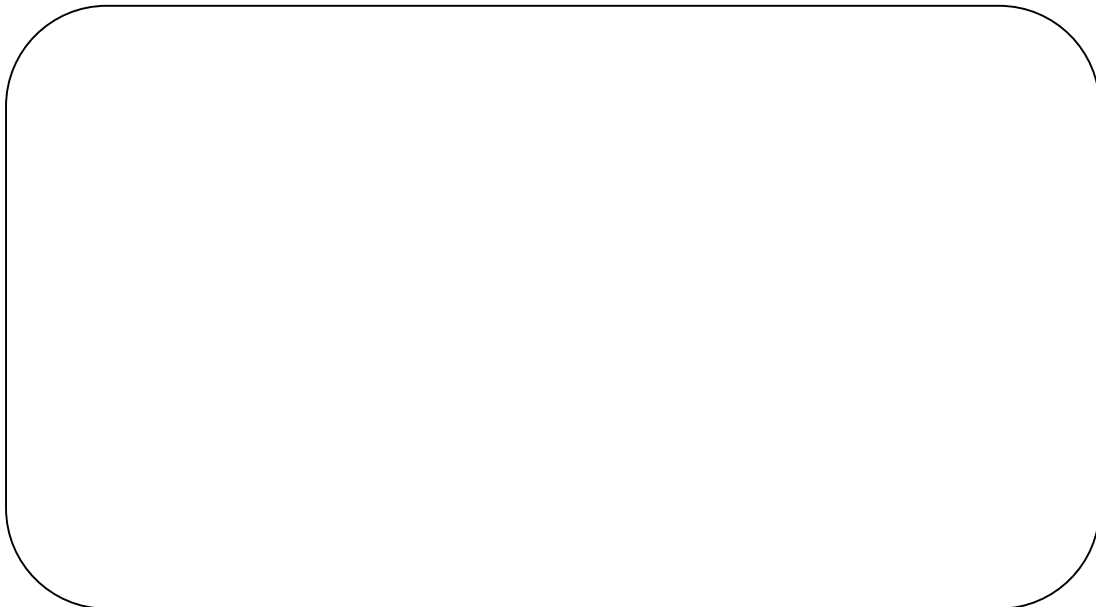
Lembar Kerja Mahasiswa

Tentukan $f''(x)$ dari fungsi yang dirumuskan dengan $f(x) = (4x^6 + 2x)(5x^2 + x + 7)$

Penyelesaian secara manual :



Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :



Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

- 1 Tentukan $f''(x)$. dari fungsi yang dirumuskan dengan $f(x) = (3x^4 + 2x^2 + x)^4$
- 2 Tentukan $f''''(x)$. dari fungsi yang dirumuskan dengan $f(x) = (x^3 + 3x^2)^2$
- 3 Tentukan $f''(x)$. dari fungsi yang dirumuskan dengan $f(x) = \frac{1}{(3x^2 + 1)^2}$
- 4 Tentukan $f''(x)$. dari fungsi yang dirumuskan dengan $f(x) = \frac{1}{(4x^2 - 3x + 2)^3}$

5.7 Turunan Fungsi Aljabar dan Transenden



5.7.1 Turunan Fungsi Rasional

Contoh-contoh tentang turunan yang diuraikan sebelumnya adalah contoh-contoh turunan fungsi rasional. Jadi turunan fungsi rasional ini tidak perlu dibahas kembali.

5.7.2 Turunan Fungsi Trigonometri

Akan dicari turunan fungsi kosinus sebagai berikut.

Ingat: $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. Jika $f(x) = \cos x$, maka

Bukti secara manual :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x) * 0 - \sin(x) * 1 \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}$$

Jadi, jika $f(x) = \cos x$, maka $f'(x) = -\sin x$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```

In[13]:= f[x_] := Cos[x];
          f[x+h] - f[x]
          -----
          h
          Limit[ f[x+h] - f[x], h -> 0 ]

Out[15]= -Sin[x]

```

Bukti notasi lain dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```

In[19]:= f[x_] := Cos[x];
          f[x+h] - f[x]
          -----
          h
          Limit[ f[x+h] - f[x], h -> 0 ]

Out[21]= -Sin[x]

```

Analog :

jika $f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = \cos x$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```

In[10]:= f[x_] := Sin[x];
          f[x+h] - f[x]
          -----
          h
          Limit[-----, h -> 0]
          Out[12]= Cos[x]

```

Bukti notasi lain dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```

In[4]:= Clear[f, x];
          f[x_] := Sin[x];
          D[f[x], x]
          Out[6]= Cos[x]

```

jika $f(x) = \operatorname{tg} x$, maka $f'(x) = \sec^2 x$

jika $f(x) = \operatorname{ctg} x$, maka $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

jika $f(x) = \sec x$, maka $f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$

jika $f(x) = \operatorname{cosec} x$, maka $f'(x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$

5.7.3 Turunan Fungsi Siklometri

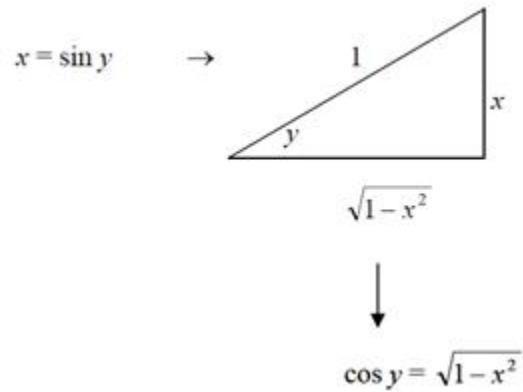
Fungsi siklometri adalah invers fungsi trigonometri. Akan dicari turunan invers fungsi sinus (arcus sinus) berikut.

$y = \operatorname{arc} \sin x$, maka akan didapat bahwa $x = \sin(y)$

Maka untuk $\frac{dx}{dy} = \cos y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$, sedangkan $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```

In[34]:= f[x_] := ArcSinh[x];
          f[x+h] - f[x];
          h
Limit[ f[x+h] - f[x] , h -> 0 ]
          h
Out[36]= 1
          sqrt(1+x^2)
  
```

Jadi, jika $y = \arcsin x$, maka $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Analog : jika $y = \arccos x$, maka $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

jika $y = \arctg x$, maka $y' = \frac{1}{1+x^2}$

jika $y = \operatorname{arccotg} x$, maka $y' = \frac{1}{1+x^2}$

jika $y = \operatorname{arcsec} x$, maka $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

jika $y = \operatorname{arccosec} x$, maka $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

5.7.4 Turunan Fungsi Logaritma

Akan dicari turunan $f(x) = \ln x$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x} \cdot x} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{x} \\
&= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x}
\end{aligned}$$

Mengingat $\lim_{h \rightarrow 0} \ln f(x) = \ln \lim_{h \rightarrow 0} f(x)$ dan $\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = e$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x} \\
&= \frac{\ln. \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{\lim_{h \rightarrow 0} x} \\
&= \frac{\ln e}{x} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Jadi, jika $f(x) = \ln x$, maka $f'(x) = \frac{1}{x}$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[4]:= Clear[f, x];
      f[x_] := Log[x];
      D[f[x], x]
Out[6]= 1/x
```

Selanjutnya jika $y = a \log x$ maka turunannya dapat dicari sebagai berikut.

$$y = a \log x \rightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \ln x$$

Sehingga $y' = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$

Jadi, jika $y = a \log x$, maka $y' = \frac{1}{x \ln a}$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[10]:= Clear[f, x];
      f[x_] := Log[x] / Log[a];
      D[f[x], x]
Out[12]= 1/(x Log[a])
```

5.7.5 Turunan Fungsi Eksponensial

Akan dicari turunan $y = a^x$ sebagai berikut.

$$y = a^x \rightarrow \ln y = \ln a^x$$

$$\rightarrow \ln y = x \ln a$$

$$\rightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{\ln a} \ln y$$

Sehingga $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{y}$

Diperoleh $\frac{dx}{dy} = y \ln a = a^x \ln a$

Jadi, jika $y = a^x$, maka $y' = a^x \ln a$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[13]:= Clear[f, x];
         f[x_] := a^x;
         D[f[x], x]

Out[13]= a^x Log[a]
```

Khususnya untuk $a = e$, jika $y = e^x$, maka $y' = e^x \ln e = e^x$

Jadi, jika $y = e^x$, maka $y' = e^x$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[18]:= Clear[f, x];
         f[x_] := e^x;
         D[f[x], x]

Out[18]= e^x Log[e]
```

5.7.6 Turunan Fungsi Hiperbolik

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Jika $f(x) = \sinh x$, maka dengan menggunakan turunan fungsi eksponensial diperoleh. Jadi, jika $f(x) = \sinh x$, maka $f'(x) = \cosh x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh x \end{aligned}$$

Bukti dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[19]:= Clear[f, x];
         f[x_] := Sinh[x];
         D[f[x], x]

Out[21]= Cosh[x]
```

5.8 Turunan Fungsi Parameter

Apabila disajikan persamaan berbentuk:

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

maka persamaan ini disebut persamaan parameter dari x dan y , dan t disebut parameter. Dari bentuk parameter ini dapat dicari $\frac{dy}{dx}$ dengan cara sebagai berikut. Dari $x = f(t)$ dibentuk $t = h(x)$ dengan h fungsi invers dari f . Nampak bahwa $y = g(t)$ merupakan bentuk fungsi komposisi

$$y = g(t) = g(h(x))$$

Diperoleh $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ untuk fungsi parameter berikut $y = 2 - 9t$ dan $x = \sin t$

Untuk $y = 2 - 9t$, maka $\frac{dy}{dt} = -9$

Untuk $x = \sin t$, maka $\frac{dx}{dt} = \cos t$

$$\text{Sehingga } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-9}{\cos t} = -\frac{9}{\cos t}$$

```
In[28]:= Clear[y, x];  
         y[t_] := 2 - 9 t;  
         x[t_] := Sin[t];  
         D[y[t], t]  
         D[x[t], t]  
         D[y[t], t] / D[x[t], t]
```

```
Out[29]= -9
```

```
Out[30]= Cos[t]
```

```
Out[31]= -9 Sec[t]
```

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa :

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ untuk fungsi parameter berikut $x = \ln(2t - 9)$ dan $y = (t^2 + 7)^3$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

- 1 Tentukan $\frac{dy}{dx}$ untuk parameter $x = e^{(2t-9)}$, $y = \cos(t)$
- 2 Tentukan $\frac{dy}{dx}$ untuk parameter $y = 2 - t$ dan $x = \cos(t)$

BAB 6

INTEGRAL

6.1 Definisi Integral

Fungsi F disebut anti turunan (integral tak tentu) dari fungsi f pada himpunan D jika $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in D$. Fungsi integral tak tentu f dinotasikan dengan $\int f(x) dx$ dan $f(x)$ dinamakan integran. Jadi $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$. Jika F suatu fungsi integral tak tentu dari f , maka $\int f(x) dx = F(x) + C$ dengan C konstanta sembarang.

Misalkan f dan g mempunyai anti turunan dan k suatu konstanta, maka

1. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
2. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

Rumus Dasar

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0$
3. $\int e^x dx = e^x + C, x \neq 0$
4. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, a \neq 1, a > 0$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan nilai integral dari $\int 2^x dx$.

Penyelesaian secara manual :

$$\int 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + C$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

The screenshot shows the Wolfram Mathematica interface. The input line (In[33]) contains the command `Integrate[2^x, x]`. The output line (Out[33]) shows the result $\frac{2^x}{\text{Log}[2]}$.

Nama :

NIM :

Klas :

Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa :

1. Tentukan nilai dari $\int \frac{2x^2+x+1}{x^3} dx$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

$$1 \quad \int (x - 2)^2 dx$$

$$2 \quad \int \frac{1 + \sqrt{x}}{x} dx$$

$$3 \quad \int (\sin x - \sqrt{x}) dx$$

6.2 Integral dengan Substitusi

Jika $u = g(x)$ yang didefinisikan pada interval I mempunyai invers $x = g^{-1}(u)$ dan fungsi-fungsi g dan g^{-1} keduanya mempunyai derivatif yang kontinu pada intervalnya masing-masing, dan f kontinu pada interval di mana g^{-1} didefinisikan, maka

$$\int f\{g(x)\} g'(x) dx = f(u) du$$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan nilai dari $\int (2x + 6)^{2014} dx$.

Penyelesaian secara manual :

Misalkan $u = 2x + 6$, maka $\frac{du}{dx} = 2$, maka $du = 2 dx$

Maka $\int (2x + 6)^{2014} dx = \int \frac{1}{2} (2x + 6)^{2014} 2 dx$

$$= \int \frac{1}{2} u^{2014} du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{2014} du$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{(2014 + 1)} u^{(2014+1)} + C$$

$$= \frac{1}{4030} u^{2015} + c$$

$$= \frac{1}{4030} (2x + 6)^{2015} + c$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

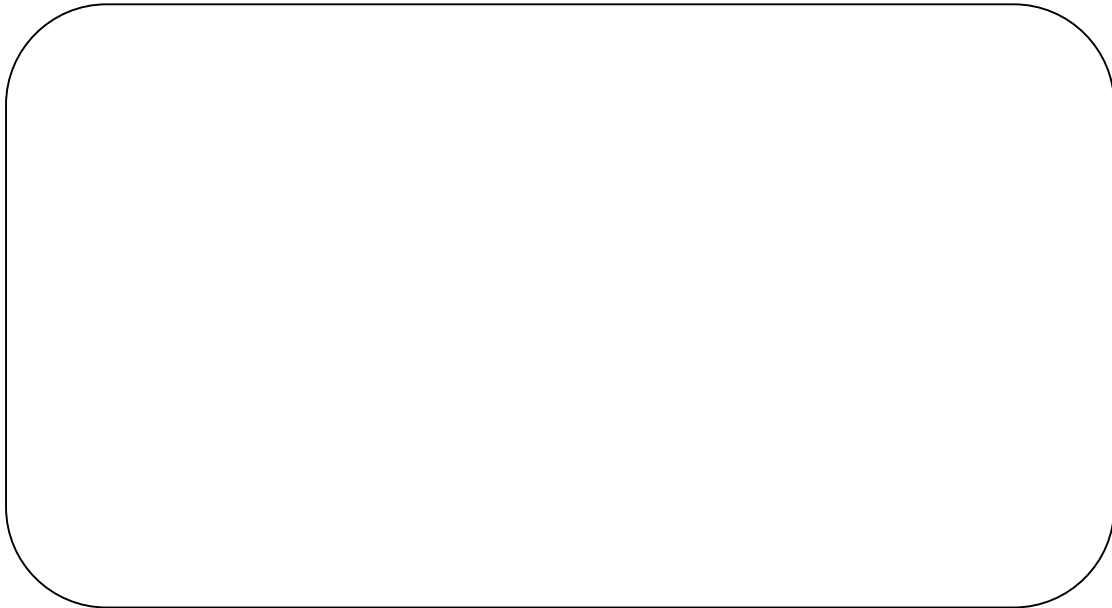
$$\begin{aligned} \text{In[34]} &:= \int (2x + 6)^{2014} dx \\ \text{Out[34]} &= \frac{(6 + 2x)^{2015}}{4030} \end{aligned}$$

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa

1. Tentukan nilai dari $\int x(3x^2 + 5)^{2017} dx$

Penyelesaian secara manual :



Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :



Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

$$1 \quad \int 3(X - 2)^9 dx$$

$$2 \quad \int (5x^2 + 2)^9 dx$$

$$3 \quad \int \frac{8}{(x + 3)^4} dx$$

6.3 Integral Parsial

Rumus :

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$

Untuk menyelesaikan integral parsial adalah pemilihan u dan dv. Fungsi yang dimisalkan u adalah fungsi yang diturunkan terus menerus menghasilkan nilai 0 (nol). Sedangkan fungsi yang dimisalkan dengan dv adalah fungsi yang dapat di integralkan.

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan nilai dari $\int x \cos x \, dx$

Penyelesaian secara manual :

Misalkan $u = x$, maka $du = dx$

Sedangkan $dv = \cos x \, dx$, maka $v = \int \cos x \, dx = \sin x$

Sehingga $\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$

$$= x \sin x + \cos x + c$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```
In[43]:= ∫ x Cos[x] dx
Out[43]= Cos[x] + x Sin[x]
```

Nama :

NIM :

Klas :

Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa

Tentukan nilai dari $\int e^x \cos x \, dx$

Penyelesaian secara manual :



Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :



Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

$$1 \quad \int x \sin x \, dx$$

$$2 \quad \int x \sin 2x \, dx$$

$$3 \quad \int x e^x \, dx$$

$$4 \quad \int e^x \sin x \, dx$$

$$5 \quad \int x^2 e^{-x} \, dx$$

6.4 Integral Fungsi Pecah Rasional

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ dengan $a_n \neq 0$ dinamakan polinomial (fungsi suku banyak) berderajat n . Fungsi konstan $P_0(x) = a_0$ dapat dipandang sebagai polinomial berderajat nol.

Fungsi pecah rasional adalah fungsi berbentuk $\frac{N(x)}{D(x)}$ dengan $N(x)$ dan $D(x)$ polinomial-polynomial. Penyelesaian tentang integral fungsi pecah rasional dapat diperinci untuk beberapa kasus sebagai berikut.

6.4.1 Keadaan $N(x) = D'(x)$

Jika $N(x) = D'(x)$ maka penyelesaiannya adalah :

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} \, dx = \ln |D(x)| + C$$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan nilai dari $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4} \, dx$.

Penyelesaian secara manual :

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4} \, dx = \ln |x^2 + 2x + 4| + C$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```

In[46]:=  $\int (2x + 2) / (x^2 + 2x + 4) \, dx + C$ 
Out[46]=  $C + \text{Log}[4 + 2x + x^2]$ 

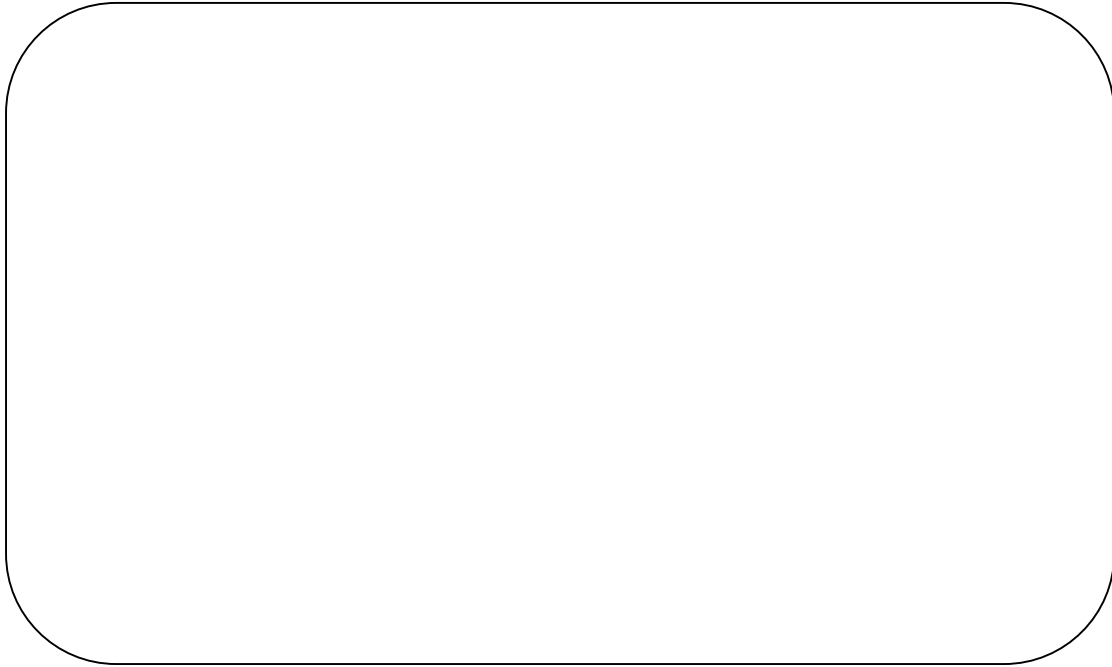
```


Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

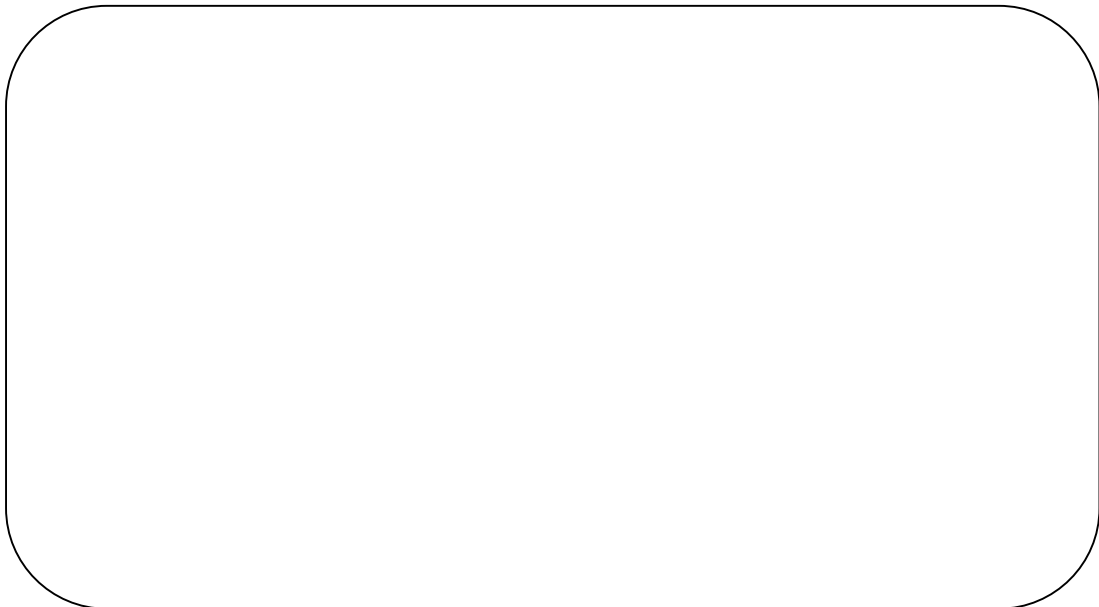
Lembar Kerja Mahasiswa :

Tentukan nilai dari $\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13} dx$

Penyelesaian secara manual :



Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :



Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

$$1 \quad \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 4} dx$$

$$2 \quad \int \frac{4x^3 + 4x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

6.4.2 Keadaan derajat $N(x) \geq$ derajat $D(x)$

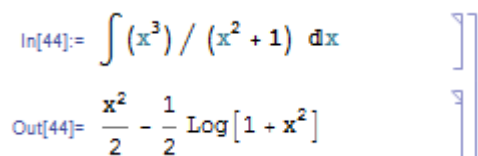
Lakukan pembagian $N(x)$ oleh $D(x)$ sehingga diperoleh bentuk $\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ dengan derajat $R(x) <$ derajat $D(x)$, $Q(x)$ adalah polinom, sehingga integralnya sangat mudah.

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan nilai dari $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$.

Penyelesaian secara manual :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{x(x^2 + 1) - x}{x^2 + 1} dx \\ &= \int \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \\ &= \int x dx - \int \frac{\frac{1}{2} 2x}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C \end{aligned}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :



In[44]:= $\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$

Out[44]:= $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \text{Log}[1 + x^2]$

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa :

1. Tentukan nilai dari $\int \frac{x^4 - 19x^2 - 48x + 60}{x^2 + 6x + 13} dx$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

$$1 \quad \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$$

$$2 \quad \int \frac{x^4 - 19x^2 - 48x + 60}{x^2 + 6x + 13} dx$$

6.4.3 Keadaan Derajat $N(x) < \text{Derajat } D(x)$

Pada pembahasan ini $N(x) \neq D'(x)$. Tanpa mengurangi umumnya pembicaraan, diambil koefisien suku pangkat tertinggi dari x dalam $D(x)$ adalah satu. Untuk menghitung $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$, terlebih dahulu integran dipisah menjadi pecahan- pecahan parsialnya. Cara memisah $\frac{N(x)}{D(x)}$ menjadi pecahan- pecahan parsialnya :

- 1) derajat $N(x) < \text{derajat } D(x)$
- 2) koefisien suku pangkat tertinggi dari x dalam $D(x)$ adalah satu
- 3) $N(x)$ dan $D(x)$ tidak lagi mempunyai faktor persekutuan

Menurut keadaan faktor-faktor $D(x)$, dalam memisahkan $\frac{N(x)}{D(x)}$ menjadi pecahan-pecahan parsialnya dapat dibedakan menjadi 4 keadaan, yaitu :

6.6.1 Semua faktor $D(x)$ linear dan berlainan

Misalkan faktor-faktor $D(x)$ adalah $x - a$, $x - b$, $x - c$, dan $x - d$, maka $D(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$. Dibentuk $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-d}$ sebagai suatu identitas dalam x , sehingga untuk setiap nilai x yang diberikan maka nilai ruas kiri dan nilai ruas kanan dalam (1) sama. Konstanta A , B , C , dan D adalah konstanta-konstanta yang masih akan dicari nilainya.

Contoh Soal dan Pembahasannya. Dapatkan nilai dari $\int \frac{6x^2+6}{x^3+4x^2+x-6} dx$

Penyelesaian secara manual :

$$\int \frac{6x^2 + 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} dx = \int \frac{6x^2 + 6}{(x - 1)(x + 2)(x + 3)} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+3)} \right\} dx$$

$$= \int \frac{A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)} dx$$

Maka di dapat persamaan

$$6x^2 + 6 = A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)$$

Dari persamaan jika

$$x = 1 \text{ didapat } \rightarrow 6 * 1^2 + 6 = A(1+2)(1+3) + B(1-1)(x+3) + C(1-1)(1+2)$$

$$\rightarrow 12 = 12A \rightarrow A = 1$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

$$\text{In[47]:= } \int (6x^2 + 6) / (x^3 + 4x^2 + x - 6) \, dx + C$$

$$\text{Out[47]:= } C + 6 \left(\frac{1}{6} \text{Log}[-1 + x] - \frac{5}{3} \text{Log}[2 + x] + \frac{5}{2} \text{Log}[3 + x] \right)$$

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa :

1. Tentukan nilai dari $\int \frac{1}{x(x+7)} dx$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

$$1 \int \frac{2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 - x} dx$$

6.6.2 Semua faktor $D(x)$ linear tetapi ada yang sama (berulang).

Misalkan faktor-faktor $D(x)$ adalah $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - c$, $x - d$, $x - d$, dan $x - d$, maka $D(x) = (x - a)(x - b)(x - c)^2(x - d)^3$. Selanjutnya dibentuk $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{(x-c)^2} + \frac{E}{x-d} + \frac{F}{(x-d)^2} + \frac{G}{(x-d)^3}$. Perhatikan suku-suku pecahan di ruas kanan terutama yang sesuai dengan akar sama c dan d .

Contoh Soal dan Pembahasannya. Dapatkan nilai dari $\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} dx$

Penyelesaian secara manual :

$$\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} dx = \int \left\{ \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} \right\} dx$$

Maka didapat persamaan

$$\frac{x}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$$

$$\frac{x}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A(x+1)^3 + B(x-2)(x+1)^2 + C(x-2)(x+1) + D(x-2)}{(x-2)(x+1)^3}$$

$$x = A(x+1)^3 + B(x-2)(x+1)^2 + C(x-2)(x+1) + D(x-2)$$

Dari persamaan jika

$$x = 2 \text{ didapat } \rightarrow 2 = A(2+1)^3 + B(2-2)(2+1)^2 + C(2-2)(2+1) + D(2-2)$$

$$\rightarrow 2 = 27A \rightarrow A = \frac{2}{27}$$

$$x = -1 \text{ didapat } \rightarrow -1$$

$$= A(-1+1)^3 + B(-1-2)(-1+1)^2 + C(-1-2)(-1+1) + D(-1-2)$$

$$\rightarrow -1 = -3D \rightarrow D = \frac{1}{3}$$

$$x = 1 \text{ didapat } \rightarrow 1 = A(1+1)^3 + B(1-2)(1+1)^2 + C(1-2)(1+1) + D(1-2)$$

$$\rightarrow 1 = 8A - 4B - 2C - 1D$$

$$\rightarrow 1 = 8 * \frac{2}{27} - 4B - 2C - 1 * \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow 1 = \frac{16}{27} - 4B - 2C - \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \frac{20}{27} = -4B - 2C$$

$$x = 0 \text{ didapat } \rightarrow 0 = A(0+1)^3 + B(0-2)(0+1)^2 + C(0-2)(0+1) + D(0-2)$$

$$\rightarrow 0 = A - 2B - 2C - 2D$$

$$\rightarrow 0 = \frac{2}{27} - 2B - 2C - 2 * \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow -\frac{2}{27} + \frac{2}{3} = -2B - 2C$$

$$\rightarrow \frac{16}{27} = -2B - 2C$$

Dari keempat persamaan tersebut didapat :

$$A = \frac{2}{27}, B = -\frac{2}{27}, C = -\frac{6}{27}, D = \frac{1}{3}$$

Maka

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} dx &= \int \left\{ \frac{\frac{2}{27}}{(x-2)} + \frac{-\frac{2}{27}}{(x+1)} + \frac{-\frac{6}{27}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^3} \right\} dx \\ &= \int \frac{\frac{2}{27}}{(x-2)} dx + \int \frac{-\frac{2}{27}}{(x+1)} dx + \int \frac{-\frac{6}{27}}{(x+1)^2} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^3} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} dx \\
&= \frac{2}{27} \int \frac{1}{(x-2)} dx - \frac{2}{27} \int \frac{1}{(x+1)} dx - \frac{6}{27} \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \\
&\quad + \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x+1)^3} dx \\
& \int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} dx = \frac{2}{27} \ln|x-2| - \frac{2}{27} \ln|x+1| - \frac{6}{27} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^3} \\
& \int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} dx = \frac{2}{27} \ln|x-2| - \frac{2}{27} \ln|x+1| + \frac{6}{27} \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{6} \frac{1}{(x+1)^2} + C
\end{aligned}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

$$\begin{aligned}
& \text{In[5]:= } \int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3} dx \\
& \text{Out[5]= } -\frac{1}{6(1+x)^2} + \frac{2}{9(1+x)} + \frac{2}{27} \text{Log}[2-x] - \frac{2}{27} \text{Log}[1+x]
\end{aligned}$$

Nama :

NIM :

Klas :

Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa :

Tentukan nilai dari $\int \frac{1}{x(x^2+7)^2} dx$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

$$1 \quad \int \frac{x+3}{(x-1)^2(x+4)} dx$$

$$2 \quad \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$3 \quad \int \frac{x}{(x^2 - 1)^2(x^2 + 1)} dx$$

6.6.3 $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat dan semua faktor kuadratnya berlainan

Misal $D(x) = (x - p)^2 \{(x - a)^2 + b^2\} \{(x - c)^2 + d^2\}$ maka perlu dibentuk $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-p} +$

$$\frac{B}{x-q} + \frac{C}{(x-q)^2} + \frac{Dx+E}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{Fx+G}{(x-c)^2 + d^2}$$

6.6.4 $D(x)$ mempunyai faktor kuadrat yang sama.

Misal $D(x) = (x - p)^2 \{(x - a)^2 + b^2\} \{(x - c)^2 + d^2\}^3$ maka perlu dibentuk $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{x-p} +$

$$\frac{B}{x-q} + \frac{C}{(x-q)^2} + \frac{Dx+E}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{Fx+G}{(x-c)^2 + d^2} + \frac{Hx+I}{((x-c)^2 + d^2)^2} + \frac{Jx+K}{((x-c)^2 + d^2)^3}$$

6.7 Integral Fungsi Trigonometri

Rumus-rumus Sederhana :

1. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
2. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
3. $\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$
4. $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$
5. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
6. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
7. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$
8. $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

$$9. \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$10. \int \csc x \, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

6.7.1 Bentuk $\int R(\sin(x)) \cos x \, dx$ dan $\int R(\cos x) \sin x \, dx$

Jika R fungsi rasional maka

$$\int R(\sin x) \cos x \, dx = \int R(\sin x) \, d(\sin x)$$

$$= \int R(y) \, dy$$

$$\int R(\cos x) \sin x \, dx = -\int R(\cos x) \, d(\cos x)$$

$$= -\int R(t) \, dt$$

Dengan mengingat rumus $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, maka :

$$\int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x \, dx = \int R(y, 1 - y^2) \, dy$$

$$\int R(\cos x, \sin^2 x) \sin x \, dx = \int R(t, 1 - t^2) \, dt$$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan nilai dari $\int (2 \cos^2 x - \sin x + 7) \cos x \, dx$

Penyelesaian secara manual :

Menggunkan rumus $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, dimana $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$,

$$\cos x \, dx = d \sin x$$

$$\int (2 \cos^2 x - \sin x + 7) \cos x \, dx = \int (2(1 - \sin^2 x) - \sin x + 7) \, d \sin x$$

$$= \int (2 - 2 \sin^2 x - \sin x + 7) \, d \sin x$$

$$= \int (-2 \sin^2 x - \sin x + 9) \, d \sin x$$

$$= -2 \int \sin^2 x \, d \sin x - \int \sin x \, d \sin x + 9 \int d \sin x$$

$$= -2 \int \sin^2 x \, d \sin x - \int \sin x \, d \sin x + 9 \int d \sin x$$

Misalkan $u = \sin x$

Maka

$$\begin{aligned} &= -2 \int u^2 \, du - \int u \, du + 9 \int du \\ &= -\frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + 9u + C \\ &= -\frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + 9u + C \end{aligned}$$

Kalau u diganti $\sin x$ menjadi :

$$= -\frac{2}{3} \sin^3 x - \frac{1}{2} \sin^2 x + 9 \sin x + c$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

$$\begin{aligned} \text{In}[25] := & \int (-2 x^2 - x + 9) \, dx + C \\ \text{Out}[25] = & C + 9 x - \frac{x^2}{2} - \frac{2 x^3}{3} \end{aligned}$$

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa :

Tentukan nilai dari $\int \sin^3 x \, dx$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

$$1 \quad \int \sin^4 x \, dx$$

$$2 \quad \int \sin^2 x \, dx$$

$$3 \quad \int \cos^2 x \, dx$$

6.7.2 Integral dengan memperhatikan rumus-rumus

$$1. \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2} \{ \cos(x - y) - \cos(x + y) \}$$

$$2. \quad \sin x \cos y = \frac{1}{2} \{ \sin(x + y) + \sin(x - y) \}$$

$$3. \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos(x + y) + \cos(x - y) \}$$

$$4. \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} \{ 1 - \cos 2x \}$$

$$5. \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} \{ 1 + \cos 2x \}$$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan nilai dari $\int \sin 3x \sin 2x \, dx$

Penyelesaian secara manual :

Merujuk rumus $\sin x \sin y = \frac{1}{2} \{ \cos(x - y) - \cos(x + y) \}$, maka

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \sin 2x \, dx &= \int \frac{1}{2} \{ \cos(3x - 2x) - \cos(3x + 2x) \} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \{ \cos x - \cos 5x \} dx \\ &= \int \frac{1}{2} \cos x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 5x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x \, dx - \frac{1}{10} \int \cos 5x \, d5x \\ &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C \end{aligned}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

$$\begin{aligned} \text{In[26]} &:= \int \text{Sin}[3 \, x] \star \text{Sin}[2 \, x] \, dx + C \\ \text{Out[26]} &= C + \frac{\text{Sin}[x]}{2} - \frac{1}{10} \text{Sin}[5 \, x] \end{aligned}$$

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa :

Tentukan nilai dari $\int \sin 3x \cos 2x \, dx$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

$$1 \quad \int \sin 3x \sin 2x \, dx$$

$$2 \quad \int \cos 3x \cos 2x \, dx$$

$$3 \quad \int \sin 3x \cos 2x \, dx$$

6.8 Integral Fungsi Irrasional

Dalam tulisan ini dibahas beberapa jenis integral fungsi irrasional. Pada dasarnya integral ini diselesaikan dengan mengubah integral irrasional menjadi integral rasional, baik rasional aljabar maupun trigonometri.

Rumus Fungsi Irrasional

$$1. \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$2. \quad \int \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + C$$

$$3. \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

$$4. \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$5. \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$6. \quad \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

$$7. \quad \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

6.8.1 Bentuk Irrasional Satu Suku

Jika integran hanya memuat bentuk irrasional dari satu macam suku, misalnya x , maka integral dapat dijadikan integral rasional dengan substitusi $y = \sqrt[n]{x}$ dimana n kelipatan persekutuan terkecil dari pangkat-pangkat akar.

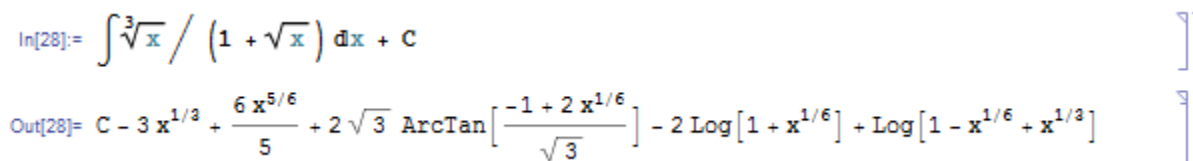
Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan nilai dari $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}} \, dx$

Penyelesaian secara manual :

Diambil substitusi $= \sqrt[6]{x}$, sehingga $x = y^6$, dan $dx = 6y^5 dy$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{\sqrt[3]{y^6}}{1+\sqrt{y^6}} 6y^5 dy \\
 &= \int \frac{y^2}{1+y^3} 6y^5 dy \\
 &= 6 \int \frac{y^7}{1+y^3} dy \\
 &= 6 \int \frac{(1+y^3)y^4 - y^4}{1+y^3} dy \\
 &= 6 \int \frac{(1+y^3)y^4}{1+y^3} dy - 6 \int \frac{y^4}{1+y^3} dy \\
 &= 6 \int y^4 dy - 6 \int \frac{(1+y^3)y - y}{1+y^3} dy \\
 &= 6 \int y^4 dy - 6 \int y dy - 6 \int \frac{y}{1+y^3} dy
 \end{aligned}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :



$$\text{In}[28]:= \int \sqrt[3]{x} / (1 + \sqrt{x}) \, dx + C$$

$$\text{Out}[28]= C - 3 x^{1/3} + \frac{6 x^{5/6}}{5} + 2 \sqrt{3} \operatorname{ArcTan}\left[\frac{-1 + 2 x^{1/6}}{\sqrt{3}}\right] - 2 \operatorname{Log}[1 + x^{1/6}] + \operatorname{Log}[1 - x^{1/6} + x^{1/3}]$$

6.8.2 Satu-satunya Bentuk Irrasional $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Dalam hal ini $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ sebagai satu-sanya betu ntuk irrasional di dalam integran, maka integran dapat dijadikan rasional dengan substitusi

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + y, \text{ jika } a > 0$$

Atau

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xy + \sqrt{c}, \text{ jika } c \geq 0$$

Dengan substitusi yang pertama diperoleh $x = \frac{-(y^2-c)}{2y\sqrt{a-b}}$ dan dx dapat dinyatakan ke dalam bentuk rasional dalam y kali dy .

6.9 Substitusi Trigonometri

Dengan memperhatikan rumus trigonometri $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dan $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ bentuk-bentuk irrasional berikut dapat dijadikan bentuk rasional fungsi trigonometri.

Bentuk	Substitusi	Diferensial
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \phi$	$dx = a \cos \phi d\phi$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \phi$	$dx = a \cos \phi \tan \phi d\phi$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \phi$	$dx = a \sec^2 \phi d\phi$

Contoh Soal dan Pembahasannya. Tentukan nilai dari $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$

Penyelesaian secara manual :

Bentuk yang dapat diambil adalah $\sqrt{4-x^2}$ maka menjadi bentuk $\sqrt{2^2-x^2}$

Menggunakan substitusi $x = 2 \sin \phi$

Yang menghasilkan $dx = 2 \cos \phi d\phi$

Maka $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2 \sin \phi)^2} = \sqrt{4-4 \sin^2 \phi} = 2\sqrt{1-\sin^2 \phi} = 2\sqrt{\cos^2 \phi} = 2 \cos \phi$

Akibatnya $\cos \phi = \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2}$

Dari sini $\sin t = \frac{1}{2} x$, sehingga didapat $t = \sin^{-1} \frac{1}{2} x$

Jadi integralnya adalah

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{2 \cos \phi}{4 \sin^2 \phi} 2 \cos \phi d\phi = \int \cot^2 \phi d\phi = \int (\csc^2 \phi - 1) d\phi \\
 &= -\cot \phi - \phi + C = -\frac{\cos \phi}{\sin \phi} - \phi + C \\
 &= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \sin^{-1} \frac{1}{2} x + C
 \end{aligned}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

$$\text{In[27]:= } \int \sqrt{4 - x^2} / x^2 \, dx + c$$

$$\text{Out[27]:= } C - \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} - \text{ArcSin}\left[\frac{x}{2}\right]$$

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal :

Lembar Kerja Mahasiswa

1. Tentukan nilai dari $\int \sqrt{16 + x^2} \, dx$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal dibawah ini kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

1 $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$

2 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

BAB 7

INTEGRAL TERTENTU

7.1 Definisi integral tertentu

Jika f fungsi yang terdefinisi pada $[a, b]$ dan $\lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$ ini ada, maka limit tersebut dinamakan **integral tertentu (Integral Riemann)** fungsi f pada $[a, b]$. Selanjutnya f dikatakan *integrable* pada $[a, b]$ dan integralnya ditulis $\int_a^b f(x) dx$.

$$\text{Jadi } \int_a^b f(x) dx = \lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$$

Jika f *integrable* pada $[a, b]$ maka:

- a. $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$
- b. Jika $a = b$ maka $\int_a^b f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0$

Jika $f(x) > 0$, maka $\int_a^b f(x) dx = \lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$ secara geometris menyatakan luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$, di atas sumbu X , di antara garis $x=a$ dan $x=b$.

Contoh Soal Jika $f(x) = x + 3$, tentukan $\int_{-2}^3 (x + 3) dx$

Penyelesaian secara manual :

Buat partisi pada $[-2, 3]$ dengan menggunakan n interval bagian yang sama panjang. Jadi panjang setiap interval bagian adalah $\Delta x = \frac{5}{n}$. Dalam setiap interval bagian $[x_{i-1}, x_i]$ partisi tersebut diambil $w_i = x_i$.

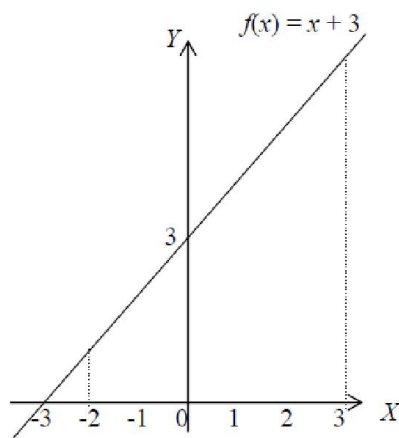
Akan dicari nilai $\lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$.

$$x_0 = -2$$

$$x_1 = -2 + \Delta x = -2 + \frac{5}{n}$$

$$x_2 = -2 + \Delta x = -2 + 2 \frac{5}{n}$$

$$x_3 = -2 + \Delta x = -2 + 3 \frac{5}{n}$$



$$\begin{aligned}..x_i &= -2 + \Delta x = -2 + i \frac{5}{n} \\ x_n &= -2 + \Delta x = -2 + n \left(\frac{5}{n}\right) = 3\end{aligned}$$

Karena untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dipilih $w_i = x_i$ maka $w_i = -2 + i \left(\frac{5}{n}\right) = -2 + \frac{5i}{n}$, sehingga

$$\begin{aligned}f(w_i) &= w_i + 3 \\ &= \left(-2 + \frac{5i}{n}\right) + 3 \\ &= 1 + \frac{5i}{n}\end{aligned}$$

Jadi jumlah Riemann fungsi f pada $[-2, 3]$ bersesuaian dengan partisi P tersebut adalah

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{5i}{n}\right) \frac{5}{n} \\ &= \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{5i}{n}\right) \\ &= \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n \frac{5i}{n} \\ &= \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{5}{n} (n) + \frac{25}{n^2} \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\ &= 5 + \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Jika $\|P\| \rightarrow 0$ maka $n \rightarrow \infty$, sehingga:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 17\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Jadi $\int_{-2}^3 (x+3) dx = 17\frac{1}{2}$.

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

```

In[2]:= f[x_] := x + 3;
a := -2;
b := 3;
n := 100;
deltax = N[ $\frac{b-a}{n}$ ];


$$\sum_{k=0}^{n-1} (f[a + k * deltax] * deltax)$$

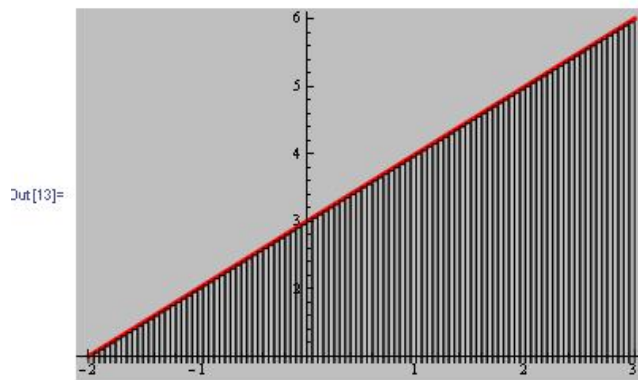

delta = N[ $\frac{b-a}{n}$ ];
pts = Table[a + i * delta, {i, 0, n}];
values = Table[f[pts[[i]]], {i, 1, n + 1}];
pic = Table[Line[{pts[[i]], 0}, {pts[[i]], values[[i]]}, {pts[[i + 1]], values[[i]]}, {pts[[i + 1]], 0}], {i, 1, n}];
plt = Plot[f[x], {x, a, b}, PlotStyle -> {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.008]}}, Background -> GrayLevel[0.75],
  DisplayFunction -> Identity];
Show[plt, Graphics[pic], DisplayFunction -> $DisplayFunction]

area =  $\sum_{i=1}^n (\text{values}[[i]] * \text{delta})$ ;

Print["Approximate area = ", area]

```

Out[7]= 17.375



Approximate area = 17.375

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal :

Lembar Kerja Mahasiswa

Tentukan nilai dari $\int_0^9 -x^2 + 3x + 2 \, dx$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

$$1 \quad \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$$

$$2 \quad \int_1^5 \frac{dx}{x+1}$$

$$3 \quad \int_0^\pi \sin x \, dx$$

$$4 \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x \, dx$$

$$5 \quad \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx$$

7.2 teorema Fundamental Kalkulus untuk integral tertentu

Jika f integrable pada $[a, b]$ dan F suatu anti turunan dari f pada $[a, b]$ (atau $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$), maka: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

$$F(b) - F(a) \text{ biasa ditulis } [F(x)]_a^b$$

Bukti:

Ambil sembarang partisi $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ pada $[a, b]$. Karena $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$ maka $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Berdasarkan *teorema nilai rata-rata* maka terdapat $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sehingga

$$\begin{aligned} F(x_i) - F(x_{i-1}) &= F'(w_i) (x_i - x_{i-1}) \\ &= f(w_i) (x_i - x_{i-1}) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n f(w_i) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \{F(w_i) - F(x_{i-1})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{F(x_1) - F(x_0)\} + \{F(x_2) - F(x_1)\} + \{F(x_3) - F(x_2)\} + \dots + \\
&\{F(x_n) - F(x_{n-1})\} \\
&= F(x_n) - F(x_0) \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \{F(b) - F(a)\} = F(b) - F(a)$$

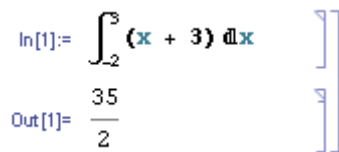
Jadi $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Contoh Soal Dapatkan nilai dari $\int_{-2}^3 (x + 3) dx$.

Penyelesaian secara manual :

$$\int_{-2}^3 (x + 3) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + 3x \right]_{-2}^3 = \left\{ \frac{1}{2} (3)^2 + 3(3) \right\} - \left\{ \frac{1}{2} (-2)^2 + 3(-2) \right\} = 17 \frac{1}{2}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :



In[1]:= $\int_{-2}^3 (x + 3) dx$

Out[1]:= $\frac{35}{2}$

Nama :
NIM :
Klas :
Tanggal

Lembar Kerja Mahasiswa

Tentukan nilai dari $\int_1^7 \sqrt{2x+3} \, dx$

Penyelesaian secara manual :

Penyelesaian dengan menggunakan Matematika Wolfram :

Soal – soal kerjakan secara manual dan menggunakan software Wolfram Mathematica :

1 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 5x \, dx$

2 $\int_3^{11} \sqrt{2x+3} \, dx$

Reference

- I.N. Bronshtein, K.A. Semendyayev, G. Musiol, H. Muehlig, 2007, Handbook of Mathematics
5th Ed. With 745 Figures and 142 Tables
- Stewart, James. 1998. *Kalkulus*, edisi 4, jilid I. Penerbit Erlangga. (alih bahasa : Drs.Nyoman
Susila,M.Sc. & Hendra Gunawan, Ph.D)
- Dosen Jurusan Matematika FMIPA ITS. 1999. Buku Ajar Kalkulus 1
- Toni Hartono Bagyo . 2010. Handout : Kalkulus Dasar, Fakultas Ilmu Komputer Universitas
Narotama Surabaya
- John W. Gray , 1998, Mastering Mathematica: programming methods and aplications, Academic
Press, San Diego.
- Roman Maeder, 1997 , Programming in Mathematica, Addison Wesley Longman,
Massachusetts.